座位号________ 考场号________ 准考证号________ 姓名________ 班级________ 学校________

密 封 线 内 不 要 答 题

机密★启用前

2022～2023学年普通高中高二(下)期末教学质量检测

数学试题

本试卷共6页,22题。测试时间:120分钟。卷面总分:150分。

★祝考试顺利★

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

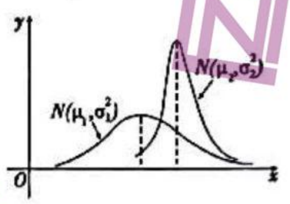
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 甲盒中有3个红球,3个白球,乙盒中有4个红球,2个白球,现从甲盒中取出一球放入乙盒中,再从乙盒中取出一球,记事件A:甲盒中取出的球是红球,事件B:在乙盒中取出的球是红球,则$P(B|A)$等于

A. $\frac{5}{7}$　　B. $\frac{5}{6}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. 设两个正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)(\sigma_1>0)$和$N(\mu_2,\sigma_2^2)(\sigma_2>0)$的密度函数图象如图所示.则有



A. $\mu_1<\mu_2,\sigma_1<\sigma_2$　　B. $\mu_1<\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$　　C. $\mu_1>\mu_2,\sigma_1<\sigma_2$　　D. $\mu_1>\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$

3. 2023年5月28日国产大飞机C919由上海飞抵北京,这标志着C919商飞成功,开创了中国商业航空的新纪元.某媒体甲、乙等四名记者去上海虹桥机场、北京首都机场和中国商飞总部进行现场报道,若每个地方至少有一名记者,每个记者只去一个地方,则甲、乙同去上海虹桥机场的概率为

A. $\frac{1}{18}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 已知曲线 $y=\frac{ax}{\sin x}$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则 $a+b$ 等于

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5. 直上九天问苍穹，天宫六人绘新篇. 2023 年 5 月 30 日神州十六号发射成功. 神十五与神十六乘组航天员在太空胜利会师. 6 名航天员分两排合影留念，若从神十五和神十六每组的 3 名航天员中各选 1 人站在前排，后排的 4 人要求同组的 2 人必须相邻，则不同的站法有

A. 72 种　　B. 144 种

C. 180 种　　D. 288 种

6. 一个盒中有 10 个球，其中红球 7 个，黄球 3 个，随机抽取两个，则至少有一个黄球的概率为

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{1}{15}$　　C. $\frac{7}{15}$　　D. $\frac{8}{15}$

7. 2022 年卡塔尔世界杯决赛中，阿根廷队与法国队在 120 分钟比赛中 3∶3 战平. 经过四轮点球大战阿根廷队以总分 7∶5 战胜法国队，第三次获得世界杯冠军. 其中门将马丁内斯扑出法国队员的点球，表现神勇. 扑点球的难度一般比较大，假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门，门将也会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向来扑点球，而且门将即使方向判断正确也有 $\frac{1}{2}$ 的可能性扑不到球. 若不考虑其他因素，在点球大战中，门将在前四次扑出点球的个数 X 的期望为

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 2

8. 已知抛物线 $C: x^2=8y$ 的焦点为 F，C 的准线与对称轴交于 D，过 D 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，且 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BD}$，若 FB 为 $\angle DFA$ 的平分线，则 $|AF|+|BF|$ 等于

A. $\frac{8}{3}$　　B. 8　　C. 10　　D. $\frac{32}{3}$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 设 X，Y 为随机变量，且 $Y=3X-1$，若 $E(Y)=5$，$D(Y)=9$，则

A. $E(X)=2$　　B. $E(X)=4$　　C. $D(X)=1$　　D. $D(X)=\frac{8}{3}$

10. $\left(\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的有理项为

A. $\frac{64}{x^3}$　　B. 80　　C. $160x$　　D. x^4

11. 中国古代数学名著《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为"鳖臑".若三棱锥 P-ABC 为鳖臑，$PA\perp$ 平面 ABC，$PA=3$，$AC=BC=2$，则

A. $BC\perp$ 平面 PAB

B. 直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

C. 二面角 A-PB-C 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{26}}{26}$

D. 三棱锥 P-ABC 外接球的表面积为 17π

12. 随机变量 ζ 的分布列如下表，

ζ	-1	0	1	2
P	$2a$	a	$2a$	b

则下列选项正确的是

A. $2a+b=1$　　B. $E\zeta=2b$　　C. $D\zeta=4a-b^2$　　D. $D\xi$ 的最大值为 $\frac{36}{25}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知平面 α 的法向量 $\boldsymbol{a}=(1,-2,m)$，直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{n}=(3,1,-2)$，若 $l/\!/\alpha$，则 $m=$________.

14. 某校高二年级 1200 人，期末统测的数学成绩 $X\sim N(85,25)$，则这次统测数学及格的人数约为(满分 150 分，不低于 90 分为及格)________.

(附：$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\pi+2\sigma)=0.9545$)

15. 已知双曲线 $\frac{x^2}{2a^2}-y^2=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 有相同的焦点，则此双曲线的离心率为________.

16. 设随机变量 X 所有可能的取值为 $1,2,\cdots,n$，且 $P(X=i)=p_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$，定义 $M(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}p_ip_{n+1-i}$. 若 $p_1p_n=\frac{1}{n^2}$，则当 $n=3$ 时，$M(X)$ 的最大值为________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

某校"环境"社团随机调查了某市 100 天中每天空气中的 PM2.5 和当天到街心公园锻炼的人次，整理数据得到下表(单位：天)：

PM2.5 \ 锻炼人次	[0,300]	(300,600]	(600,900]
[0,35]	5	12	25
(35,75]	7	10	13
(75,120]	10	11	7

若某天的空气中的 PM2.5 不高于 75，则称这天"空气质量好"；若某天的空气中的 PM2.5 高于 75，则称这天"空气质量不好".

(1)估计该市一天"空气质量好"的概率；

(2)根据所给数据，完成下面的2×2列联表，并根据列联表，判断是否有95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关？

	人次≤600	人次>600
空气质量好		
空气质量不好		

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18.(本小题满分12分)

我国元代数学家朱世杰在《四元玉鉴》中研究过高阶等差数列问题，如数列$\{a_n\}$满足$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列，称$\{a_n\}$为二阶等差数列. 已知二阶等差数列1,2,4,7,……

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{2^n}$，求$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

19.（本小题满分 12 分）

抖音某平台在今年 6 月一周的时间直播间带货 3.5 亿元，数据分析统计如下表：

第 t 天	1	2	3	4	5	6	7
交易额 y（单位：千万元）	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

(1)通过分析，发现可用线性回归模型拟合交易额 y 与 t 的关系，请用相关系数加以说明；

(2)利用最小二乘法建立 y 关于 t 的回归方程（系数精确到 0.1），并预测下一周的第一天（即第 8 天）的交易额.

参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=42.1$，$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=8.1$，$\sqrt{7}\approx2.65$；

参考公式：相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$；

回归方程 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ 中，斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$.

20.（本小题满分 12 分）

芯片是二十一世纪最核心的科技产品，我们一直被美国卡脖子，随着中国科技的不断发展，我们在芯片技术上取得了重大突破．有些型号的芯片已经批量生产．某芯片代工公司有 3 台机器生产同一型号的芯片，第 1，2 台生产的次品率均为 1%，第 3 台生产的次品率为 2%，生产出来的芯片混放在一起．已知第 1，2，3 台机器生产的芯片数分别占总数的 30%，40%，30%.

(1)求任取一个芯片是正品的概率；

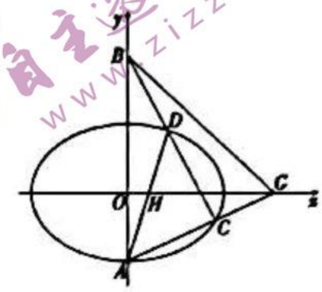
(2)如果取到的芯片是次品，分别求出是第 1 台机器，第 2 台机器，第 3 台机器生产的概率.

21.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点 $M\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$,点 A 为下顶点,且 AM 的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)如图,过点 $B(0,4)$作一条与 y 轴不重合的直线,该直线交椭圆 E 于 C、D 两点,直线 AD,AC 分别交 x 轴于 H,G 两点,O 为坐标原点.求证:$|OH||OG|$为定值,并求出该定值.



22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\ln x-ax$ 有两个零点.

(1)求 a 的取值范围;

(2)设 x_1,x_2 是 $f(x)$的两个零点,证明:$a(x_1+x_2)>2$.

2022～2023学年普通高中高二(下)期末教学质量检测

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	A	B	D	C	D	AC	AD	BCD	BD

1. 解析：在盒中取出一个红球，放入乙盒中，则乙盒中共有7个球，其中红球5个，所以，$P(B|A)=\frac{5}{7}$. 或 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{6}\times\frac{5}{7}}{\frac{3}{6}}=\frac{5}{7}$. 故选A.

2. 解析：根据 $N(\mu,\sigma^2)\mu,\sigma$ 的几何意义知，$\mu_1<\mu_2,\sigma_1>\sigma_2$，故选B.

3. 解析：甲、乙同去上海虹桥机场的概率为 $P=\frac{A_2^2}{C_4^2A_3^3}=\frac{1}{18}$. 故选A.

4. 解析：记 $y=f(x)$，$f'(x)=\frac{a(\sin x-x\cos x)}{\sin^2 x}$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$，$\therefore a=2$.

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}a=\pi$，所以，曲线 $y=\frac{ax}{\sin x}$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程为 $y-\pi=2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $y=2x$，

$\therefore b=0$. 故 $a+b=2$. 故选A.

5. 解析：第一排的站法有 $C_3^1C_3^1A_2^2=18$，第二排的站法有 $A_2^2A_2^2A_2^2=8$，共有站法 $18\times8=144$ 种. 故选B.

6. 解析：记抽取黄球的个数为 X，则 X 服从超几何分布，其分布列为

$P(X=k)=\frac{C_3^kC_7^{2-k}}{C_{10}^2}$，$k=0,1,2$. 所以，

$P(X\geqslant1)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^2}+\frac{C_3^2C_7^0}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$.

或 $P(X\geqslant1)=1-P(X=0)=1-\frac{C_3^0C_7^2}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$. 故选D.

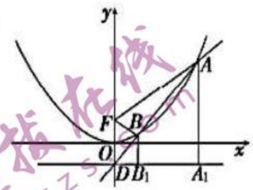
7. 解析：依题意可得，门将每次可以扑出点球的概率为 $p=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

门将在前四次扑出点球的个数 X 可能的取值为0，1，2，3，4. $X\sim B\left(4,\frac{1}{6}\right)$，

$P(X=k)=C_4^k\times\left(\frac{1}{6}\right)^k\times\left(\frac{5}{6}\right)^{4-k}$，$k=0,1,2,3,4$.

期望 $E(X)=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$. 故选C.

8. 解析：$F(0,2)$，$D(0,-2)$，所以$|DF|=4$. 过 A，B 分别作准线的垂线，垂足分别为 A_1，B_1，则 $AA_1 /\!/ BB_1$. 因为 FB 为$\angle DFA$ 的平分线，则$\dfrac{|AB|}{|BD|}=\dfrac{|AF|}{|DF|}$，又$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BD}$，$\therefore |AA_1|=|AF|=2|DF|=8$，又$|BB_1|=|AA_1|\cdot\dfrac{|DB|}{|DA|}=\dfrac{1}{3}$，$\therefore |BF|=|BB_1|=\dfrac{1}{3}|AA_1|=\dfrac{8}{3}$.



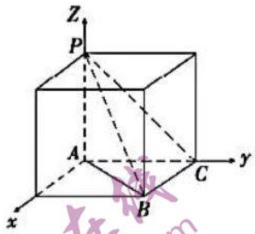
$\therefore |AF|+|BF|=8+\dfrac{8}{3}=\dfrac{32}{3}$. 故选 D.

9. 解析：由 $Y=3X-1$，得 $X=\dfrac{Y}{3}+\dfrac{1}{3}$，又 $E(Y)=5$，$D(Y)=9$，

$\therefore E(X)=\dfrac{E(Y)}{3}+\dfrac{1}{3}=2$，$D(X)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2D(Y)=1$. 故选 AC.

10. 解析：通项 $T_{k+1}=C_6^k(x^{\frac{2}{3}})^{6-k}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=(-2)^kC_6^kx^{\frac{24-7k}{6}}$，由$\dfrac{24-7k}{6}\in\mathbf{Z}$，$\therefore k=0$ 或 $k=6$，当 $k=0$ 时，$T_1=(-2)^0C_6^0x^4=x^4$，当 $k=6$ 时，$T_7=(-2)^6C_6^6x^{-3}=64x^{-3}$. 故选 AD.

11. 解析：该几何体可以看成是长方体中截出来的三棱锥 P-ABC，建立如图所示的直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,3)$，$\overrightarrow{CB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-2,-2,3)$.



$\because \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{BP}=-4\neq0$，$\therefore \overrightarrow{CB}$与$\overrightarrow{BP}$不垂直，$BC$ 与平面 PAB 不垂直，选项 A 错误；

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2x=0,\\ -2x-2y+3z=0,\end{cases}$

令 $y=3$，得平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,3,2)$.

又$\overrightarrow{AP}=(0,0,3)$，设 PA 与平面 PBC 所成角为 θ，则

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AP},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{6}{3\times\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. 选项 B 正确；

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{AP}=(0,0,3)$，$\overrightarrow{AB}=(2,2,0)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3z_1=0,\\ 2x_1+2y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，得平面 PAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,-1,0)$.

$|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{-3}{\sqrt{13}\times\sqrt{2}}\right|=\dfrac{3\sqrt{26}}{26}$，选项 C 正确；

正方体的对角线为三棱锥 P-ABC 外接球的直径，

$2R=PB=\sqrt{PA^2+AC^2+BC^2}=\sqrt{17}$，所以，球的表面积为 $S=4\pi R^2=17\pi$. 选项 D 正确. 故选 BCD.

12. 解析：由 $2a+a+2a+b=1$，得 $a=\frac{1}{5}(1-b)$.

$E\zeta=-1\times2a+0+1\times2a+2b=2b$.

ζ^2	0	1	4
P	a	$4a$	b

$D\zeta=\sum\limits_{1}^{3}\zeta_i^2p_i-(E\zeta)^2=0\times a+1\times4a+4\times b-(2b)^2=4(a+b-b^2)=-4\left(b^2-\frac{4}{5}b-\frac{1}{5}\right)=-4\left(b-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{36}{25}$.

当且仅当 $b=\frac{2}{5}$时，$D\zeta$的最大值为$\frac{36}{25}$. 故选 BD.

13. 解析：$\because l//\alpha$，则 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $1\times3-2\times1-2m=0$，解得 $m=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

14. 解析：依题意，$\mu=85$，$\sigma=5$，

$P(80\leqslant X\leqslant90)=0.6827$，$P(85\leqslant X\leqslant90)=\frac{1}{2}\times0.6827=0.34135$，

$P(X\geqslant90)=0.5-0.34135=0.15865$，$1200\times0.15865=190$.

答案：190

15. 解析：椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的焦点为$(-3,0)$，$(3,0)$，由 $2a^2+1=3^2$，得 $2a^2=8$. 所以，双曲线的离心率 $e=\sqrt{\frac{c^2}{2a^2}}=\sqrt{\frac{3^2}{8}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

答案：$\frac{3\sqrt{2}}{4}$

16. 解析：当 $n=3$ 时，$p_1p_3=\frac{1}{9}$，

则 $M(X)=\sum\limits_{i=1}^{3}p_ip_{4-i}=p_1p_3+p_2p_2+p_3p_1=2p_1p_3+p_2^2=\frac{2}{9}+[1-(p_1+p_3)]^2$

$\because p_1>0$，$p_3>0$，$p_1p_3=\frac{1}{9}$，$\therefore p_1+p_3\geqslant2\sqrt{p_1p_3}=\frac{2}{3}$，当且仅当 $p_1=p_3=\frac{1}{3}$时，等号成立.

所以，$\frac{2}{3}\leqslant p_1+p_3<1$，$0<1-(p_1+p_3)\leqslant\frac{1}{3}$.

$\therefore M(X)\leqslant\frac{2}{9}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$. 即 $M(X)$的最大值为$\frac{1}{3}$.

答案：$\frac{1}{3}$

17.(10 分)解析:(1)由频数分布表可知,该市一天"空气质量好"的概率为

$\frac{5+12+25+7+10+13}{100}=0.72$. …………………………………………… 4 分

(2)2×2 列联表如下:

	人次≤600	人次>600
空气质量好	34	38
空气质量不好	21	7

…………………………………………………………………………………… 7 分

$K^2=\frac{100\times(34\times7-38\times21)^2}{55\times45\times72\times28}\approx6.285>3.841$,

故有 95%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关. ……… 10 分

18.(12 分)解:(1)由 $a_2-a_1=1, a_3-a_2=2, a_4-a_3=3$,

$\therefore a_{n+1}-a_n=1+(n-1)\times1=n$, $\therefore a_n-a_{n-1}=n-1$. ………………………… 2 分

所以,当 $n\geq2$ 时,

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+1$

$=\frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{n^2-n+2}{2}$

又 $a_1=1$,也适合,所以 $a_n=\frac{n^2-n+2}{2}$. ………………………………………… 6 分

(2) $b_n=\frac{a_{n+1}-a_n}{2^n}=\frac{n}{2^n}$, …………………………………………………… 7 分

$T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}+\frac{n}{2^n}$ ①

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$ ② ………………………………… 9 分

①-②,得

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$,

$\therefore T_n=2\left(1-\frac{n+2}{2^{n+1}}\right)=2-\frac{n+2}{2^n}$. ……………………………………………… 12 分

19.(12 分)解:(1) $\bar{t}=4$, $\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})^2=28$,

$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=42.1$, $\sqrt{\sum_{i=1}^{7}(y_i-\bar{y})^2}=8.1$

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}\approx\frac{42.1}{2\times2.65\times8.1}\approx0.98$.

因为交易额 y 与 t 的相关系数近似为 0.98，说明交易额 y 与 t 的线性相关性很强，

从而可用线性回归模型拟合交易额 y 与 t 的关系. …………………………………… 5 分

(2)因为 $\overline{y}=\frac{35}{7}=5$，$\sum_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})^2=28$，

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\overline{t}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\overline{t}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{7}(t_i-\overline{t})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\overline{t})^2}=\frac{42.1}{28}\approx1.5$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}\approx5-1.5\times4=-1$.

所以 y 关于 t 的回归方程为 $\hat{y}=1.5t-1$. …………………………………… 10 分

当 $t=8$，代入回归方程得：$\hat{y}=1.5\times8-1=11$(千万元)$=1.1$ 亿元.

所以预测下一周的第一天的交易额约为 1.1 亿元. …………………………………… 12 分

20. (12 分)解：(1)记事件 A：机器生产的芯片为次品，记事件 B_i：第 i 台机器生产的芯片，

则 $P(A|B_1)=P(A|B_2)=0.01$，$P(A|B_3)=0.02$，

$P(B_1)=0.30$，$P(B_2)=0.40$，$P(B_3)=0.30$， …………………………………… 2 分

$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+P(AB_3)=0.01\times0.30+0.01\times0.40+0.02\times0.30=0.013$.

$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.013=0.987$.

即任取一个芯片是正品的概率 0.987. …………………………………… 5 分

(2)$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\frac{0.01\times0.30}{0.013}=\frac{3}{13}$； …………………… 7 分

$P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\frac{0.01\times0.40}{0.013}=\frac{4}{13}$； …………………… 9 分

$P(B_3|A)=\frac{P(AB_3)}{P(A)}=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=\frac{0.02\times0.30}{0.013}=\frac{6}{13}$. …………………… 11 分

故如果取到的芯片是次品，是第 1 台机器，第 2 台机器，第 3 台机器生产的概率分别为 $\frac{3}{13}$，$\frac{4}{13}$，$\frac{6}{13}$. …………………………………… 12 分

21. (12 分)解：(1)由题意可得 $\begin{cases}\frac{3}{a^2}+\frac{1}{4b^2}=1,\\ \frac{\frac{1}{2}+b}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$，解得 $a=2$，$b=1$.

故求椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………… 5 分

(2)证明：由题意知，直线 BC 的斜率存在，设直线 BC：$y=kx+4$，

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx+4\end{cases}$ 整理得，$(1+4k^2)x^2+32kx+60=0$.

设 $D(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{32k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{60}{1+4k^2}$.

$\Delta=(32k)^2-4(1+4k^2)\times 60=16(4k^2-15)>0$，得 $|k|>\frac{\sqrt{15}}{2}$. ………………………… 7 分

因为 $A(0,-1)$，直线 AD 的方程为 $y=\frac{y_1+1}{x_1}x-1$，令 $y=0$，解得 $x=\frac{x_1}{y_1+1}$，

则 $H(\frac{x_1}{y_1+1},0)$，同理可得 $G(\frac{x_2}{y_2+1},0)$，

$\therefore |OH||OG|=\left|\frac{x_1}{y_1+1}\right|\left|\frac{x_2}{y_2+1}\right|=\left|\frac{x_1x_2}{(kx_1+5)(kx_2+5)}\right|=\left|\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+5k(x_1+x_2)+25}\right|$

$=\left|\dfrac{\frac{60}{1+4k^2}}{k^2\cdot\frac{60}{1+4k^2}+5k(-\frac{32k}{1+4k^2})+25}\right|=\frac{12}{5}$.（定值） ………………………… 12 分

22.（12 分）解：(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-a$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，$f(x)$ 至多一个零点；

所以，$a>0$. 且 $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 上递增，在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上递减，须有 $f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1>0$，$\therefore 0<a<\frac{1}{e}$. 又 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$.

所以，$f(x)$ 有两个零点，a 的取值范围为 $(0,\frac{1}{e})$. ………………………… 5 分

(2) 不妨设 $x_1<x_2$，由 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $0<x_1<\frac{1}{a}<x_2$.

构造函数 $F(x)=f(x)-f(\frac{2}{a}-x)\ (0<x<\frac{1}{a})$，

$F'(x)=f'(x)-f'(\frac{2}{a}-x)=(\frac{1}{x}-a)-(\frac{-1}{\frac{2}{a}-x}-a)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{a}-x}$ ………………………… 7 分

因为，$0<x<\frac{1}{a}$，$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{2}{a}-x}>0$，即 $F'(x)>0$，所以，$F(x)$ 在 $(0,\frac{1}{a})$ 是递增，又 $F(\frac{1}{a})=0$，所以 $F(x)=f(x)-f(\frac{2}{a}-x)<0$，$\therefore f(x)<f(\frac{2}{a}-x)$，………………………… 9 分

$\therefore f(x_1)<f(\frac{2}{a}-x_1)$.

又 $f(x_1)=f(x_2)$，$\therefore f(x_2)<f(\frac{2}{a}-x_1)$.

而 $x_2,\frac{2}{a}-x_1\in(\frac{1}{a},+\infty)$，$f(x)$ 在 $(\frac{1}{a},+\infty)$ 上递减，所以，$x_2>\frac{2}{a}-x_1$，即 $x_1+x_2>\frac{2}{a}$，

所以，$a(x_1+x_2)>2$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。