

雅礼中学2023届高三二月考试卷(四)

数学

全卷满分150分,考试时间120分钟

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, 则集合 $C = \{z = x + y, x \in A, y \in B\}$ 的真子集个数为 ()

A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

2. 若复数 z 满足 $z(1+i) = 2$ (i 为虚数单位), 则在复平面内复数 z 对应的点位于 ()

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

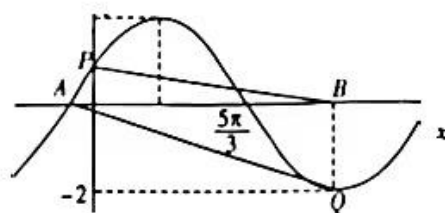
3. 17世纪, 在研究天文学的过程中, 为了简化大数运算, 苏格兰数学家纳皮尔发明了对数, 对数的思想方法即把乘方和乘法运算分别转化为乘法, 运算分别转化为乘法和加法运算, 数学家拉普拉斯称赞, “对数的发明在实效上等于把天文学家的寿命延长了许多倍.” 已知 $\lg 2 \approx 0.3010$, $\lg 3 \approx 0.4771$, 设 $N = 4^5 \times 9^{10}$, 则 N 所在的区间为 ()

A. $(10^{10}, 10^{11})$ B. $(10^{11}, 10^{12})$ C. $(10^{12}, 10^{13})$ D. $(10^{13}, 10^{14})$

4. 已知 $2 \leq a - b \leq 4$, $4 \leq a + b \leq 8$, 则 $5a + b$ 的取值范围为 ()

A. $[16, 32]$ B. $[15, 36]$ C. $[12, 30]$ D. $[16, 30]$

5. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 且 $\triangle QAB$ 的面积是 $\triangle PAB$ 面积的2倍, 则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为



A. $\left[4k\pi + \frac{\pi}{3}, 4k\pi + \frac{4\pi}{3}\right], k \in \mathbb{Z}$ B. $\left[4k\pi + \frac{2\pi}{3}, 4k\pi + \frac{8\pi}{3}\right], k \in \mathbb{Z}$
C. $\left[4k\pi - \frac{2\pi}{3}, 4k\pi + \frac{\pi}{3}\right], k \in \mathbb{Z}$ D. $\left[4k\pi - \frac{4\pi}{3}, 4k\pi + \frac{2\pi}{3}\right], k \in \mathbb{Z}$

6. $(1 + 2x - x^2)^n$ 展开式中各项系数的和为64, 则该展开式中的 x^3 项的系数为 ()

A. -60 B. -30 C. 100 D. 160

7. 在三棱锥 $A-BCD$ 中, P 为 $\triangle BCD$ 内一点, 若 $S_{\triangle PBC} = 1, S_{\triangle PCD} = 2, S_{\triangle PBD} = 3$, 则 $\overrightarrow{AP} =$ ()

A. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$
C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$ D. $\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

8. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, 若离心率 $e = \sqrt{5} - 1 (e \approx 0.618)$, 则称椭圆 C 为“黄金椭圆”, 则下列三个命题中正确的命题的个数是 ()

- (1) 在黄金椭圆 C 中, $b^2 = ac$;
(2) 在黄金椭圆 C 中, 若上顶点、右顶点分别为 E, B , 则 $\angle F_1EB = 90^\circ$;
(3) 在黄金椭圆 C 中, 以 $A(-a, 0), B(a, 0), D(0, -b), E(0, b)$ 为顶点的菱形 $ADBE$ 的内切圆过焦点 F_1, F_2 . 来源: 高三答案公众号

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 下列函数中具有性质: 存在 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 的是

A. $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ B. $f(x) = x^2$
C. $f(x) = |x^2 - 1|$ D. $f(x) = x^3$

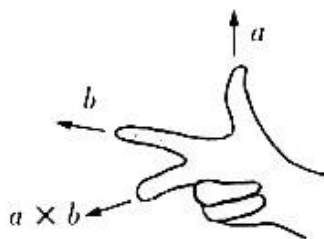
10. 现有编号为 1, 2, 3 的三个口袋, 其中 1 号口袋内装有两个 1 号球, 一个 2 号球和一个 3 号球; 2 号口袋内装有两个 1 号球, 一个 3 号球; 3 号口袋内装有三个 1 号球, 两个 2 号球. 第一次先从 1 号口袋内随机抽取 1 个球, 将取出的球放入与球同编号的口袋中, 第二次从放入球的口袋中任取一个球, 下列说法正确的是

- A. 在第一次抽到 3 号球的条件下, 第二次抽到 1 号球的概率为 $\frac{3}{5}$
B. 第二次取到 1 号球的概率为 $\frac{19}{30}$
C. 如果第二次取到 1 号球, 则它来自 1 号口袋的概率最大
D. 如果将 5 个不同小球放入这 3 个口袋内, 每个口袋至少放 1 个, 则不同的分配方法有 150 种

11. 在三维空间中, 定义向量的外积: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 叫做向量 $\mathbf{a}$

与 $\mathbf{b}$ 的外积, 它是一个向量, 满足下列两个条件:

(1) $\mathbf{a} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \mathbf{b} \perp (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, 且 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 构成右手系(即三个向量的方向依次与右手的拇指、食指、中指的指向一致), 如图所示;



(2) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 的模 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. ($\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 表示向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 的夹角)

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 有以下四个结论, 正确的有

- A. $|\overrightarrow{AB_1} \times \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD_1} \times \overrightarrow{DB}|$ B. $\overrightarrow{A_1C_1} \times \overrightarrow{A_1D_1}$ 与 $\overrightarrow{BD_1}$ 共线
C. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \times \overrightarrow{AB}$ D. $6|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}|$ 与正方体表面积的数值相等

12. 已知函数 $f(x) = \sin x + \sin(1-x)$, 则下列结论正确的是 ()

- A. $y = f(x)$ 图像是轴对称图形
B. $y = f(x)$ 一个对称中心是 $(\pi, 0)$
C. $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递增
D. $\forall x \in [0, 1], f(x) < 1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 多选题, 第一空 2 分, 第二空 3 分, 共 20 分.

13. 将边长为 2 的正 $\triangle ABC$ 水平放置后, 利用斜二测画法得其直观图 $\triangle A'B'C'$, 则 $\triangle A'B'C'$ 的面积为 _____
14. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 3, 则 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{11}$ 这 11 个数据的方差 $S^2 =$ _____
15. 双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与曲线 $C_2: x^2 - y^2 = 0$ 的四个交点构成的四边形的边恰好经过双曲线 C_1 的焦点, 则双曲线 C_1 的离心率为 _____
16. 若方程 $x^2 e^{-x} = ax - \ln x - 1$ 存在唯一实根, 则实数 a 的取值范围为 _____

四、解答题: 本题共 6 小题] 共 10 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明证明过程或演算步骤.

17. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin(A+C)\cos B = \sqrt{3}\cos^2 B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 B 为锐角.

(1) 求 B ;

(2) 若 $b=1$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

18. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 是公差 d 不为零的等差数列, $a_1=1$, 若 a_1, a_3, a_5 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

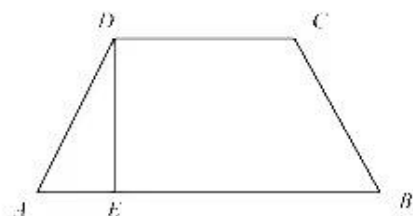
(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_{n+1}^2 - 1} + 3^n (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (本小题满分12分)

如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $DE \perp AB$, $AB = 5$, $CD = 3$, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, 现沿 DE 将等腰梯形折成直二面角.

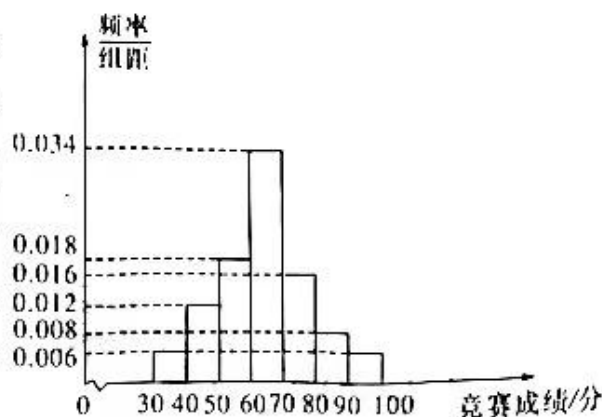
(1) 证明: $BC \perp$ 平面 ACE ;

(2) 求平面 ADE 与平面 ABC 所成二面角的余弦值.



20. (本小题满分12分)

某市为了传承发展中华优秀传统文化, 组织该市中学生进行了一次文化知识有奖竞赛, 竞赛奖励规则如下, 得分在 $[70, 80)$ 内的学生获三等奖, 得分在 $[80, 90)$ 内的学生获二等奖, 得分在 $[90, 100)$ 内的学生获得一等奖, 其他学生不得奖. 为了解学生对相关知识的掌握情况随机抽取 100 名学生的竞赛成绩, 并以此为样本绘制了样本频率分布直方图, 如图所示.



(1) 现从该样本中随机抽取两名学生的竞赛成绩, 求这两名学生中恰有一名学生获奖的概率;

(2) 若该市所以参赛学生的成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 $\sigma \approx 15$, μ 为样本平均数的估计值, 利用所得正态分布模型解决一下问题

(i) 若该市共有 10000 名学生参加了竞赛, 试估计参赛学生中成绩超过 79 分的学生数 (结果四舍五入到整数);

(ii) 若从所有参赛学生中 (参赛学生数大于 10000) 随机抽取 3 名学生进行访谈, 设期中竞赛成绩在 64 分以上的学生数为 ξ , 求随机变量 ξ 的分布列和均值.

附参考数据若随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

21. (本小题满分12分)

已知抛物线 $H: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 过点 $(0, 1)$ 作倾斜角为 45° 的直线交 H 于 A, B 两点, 且 $|AB| = 8\sqrt{3}$.

(1) 求抛物线 H 的方程;

(2) 设直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + n (n \neq 0)$, 且 l 与 H 相交于 C, D 两点, 若以 CD 为直径的圆 G 恰好经过点 F , 求圆 G 的面积.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = ax \ln x$ 和 $g(x) = b(x - \sqrt{x}) (b > 0)$ 有相同的最小值.

(1) 求 $a + \frac{1}{b}$ 的最小值;

(2) 设 $h(x) = f(x) + g(x)$, 方程 $h(x) = m$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 求证: $\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 2$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线