2022～2023 学年新乡高三第二次模拟考试
数学参考答案(理科)

1. B　因为 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$,所以 $z=\frac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$,所以 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$,故 $\bar{z}$ 的虚部为 -1.

2. C　因为 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$,且 $A\cap B=\{1\}$,所以 $1<a\leqslant 2$.

3. D　由题可知,$\frac{1}{3}+m+\frac{7}{6}-2m=1$,解得 $m=\frac{1}{2}$,则 $E(X)=0\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$.

4. A　由题意知 $F(1,0)$,设 $P(x_0,y_0)$.因为 $Q(5,0)$,$\triangle PQF$ 的面积为 $4\sqrt{3}$,所以 $|y_0|=2\sqrt{3}$,则 $x_0=3$,所以 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}=4$.

5. A　设 $a_n=An+B$,所以 $a_{n+1}=An+A+B$,所以 $a_n+2a_{n+1}=3An+2A+3B$.因为 $a_n+2a_{n+1}=6n+1$,所以 $\begin{cases}3A=6,\\2A+3B=1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}A=2,\\B=-1,\end{cases}$ 则 $a_n=2n-1$,所以 $S_{20}=20\times1+\frac{20\times(20-1)}{2}\times2=400$.

6. B　作图略.A 选项中,$BM\,/\!/\,B_1N$,所以直线 BM 与平面 CNQ 不平行.
B 选项中,将平面 CNQ 延展到平面 $ACNQ$,因为 $BM\,/\!/\,AQ$,所以直线 BM 与平面 CNQ 平行.
C 选项中,将平面 CNQ 延展到平面 $BCNQ$,则直线 BM 与平面 CNQ 相交于点 B.
D 选项中,假设直线 BM 与平面 CNQ 平行,过点 M 作 CQ 的平行线交 A_1B_1 于点 D,则点 D 是在 A_1B_1 上靠近点 B_1 的四等分点,显然 BD 与 QN 不平行,假设错误,所以直线 BM 与平面 CNQ 不平行.

7. A　因为 $f(x+2)=-f(x)$,所以 $f(x)$ 的周期为 4.又 $f(x-\frac{1}{2})$ 为偶函数,所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\frac{1}{2}$ 对称,则 $f(2023)=f(-1)=f(0)=0$.

8. D　由题可知,$S=\sin(-\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}=-\frac{1}{2}+\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$.

9. B　过点 P 作 $PM\perp AB$,垂足为 M(图略).若 M 在线段 AB 或 AB 的延长线上,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle PAB=|AM||AB|$,由图可知,$|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围为 $[0,6]$.若 M 在线段 AB 的反向延长线上,则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle PAB=-|AM||AB|$,由图可知,$|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AB}|$ 的取值范围为 $[-2,0)$.故 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围为 $[-2,6]$.

10. C　$f(x)=\sin\omega x+\sqrt{3}\cos\omega x=2\sin(\omega x+\frac{\pi}{3})$,因为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3})$ 上存在零点,所以 $\frac{\omega\pi}{3}+\frac{\pi}{3}>\pi$,解得 $\omega>2$.又 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$ 上单调,所以 $\frac{T}{2}\geqslant\frac{\pi}{4}$,即 $\frac{\pi}{\omega}\geqslant\frac{\pi}{4}$,解得 $0<\omega\leqslant 4$,则 $2<\omega\leqslant 4$,则 $\begin{cases}\frac{4\pi}{3}<\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{3},\\\frac{11\pi}{6}<\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{10\pi}{3},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\geqslant\frac{3\pi}{2},\\\frac{3\omega\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{7}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{26}{9}$.

11. B　根据对称性,因为 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BP}$,不妨设点 $B(am,bm)$,$m>0$,所以 $A(\frac{am-c}{2},\frac{bm}{2})$.由 $\frac{bm}{am-c}=-\frac{b}{a}$,解得 $m=\frac{c}{2a}$.由 $\begin{cases}x_P-am=\frac{1}{4}(am+c),\\y_P-bm=\frac{1}{4}bm,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_P=\frac{5am}{4}+\frac{c}{4}=\frac{7c}{8},\\y_P=\frac{5bm}{4}=\frac{5bc}{8a},\end{cases}$ 则 $\frac{49c^2}{64a^2}-\frac{25c^2}{64a^2}=1$,则 $\frac{c^2}{a^2}=\frac{8}{3}$,故 E 的离心率为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

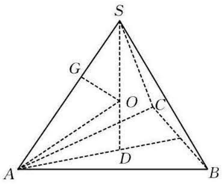
12. D　令函数 $f(x)=e^{\frac{0.6}{x}}\ln x$,则 $f'(x)=-\frac{0.6}{x^2}e^{\frac{0.6}{x}}\ln x+e^{\frac{0.6}{x}}\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}e^{\frac{0.6}{x}}(x-0.6\ln x)$.易知 $\ln x\leqslant x-1$,则 $-0.6\ln x\geqslant -0.6x+0.6$,则 $f'(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{0.6}{x}}(x-0.6\ln x)\geqslant\frac{1}{x^2}e^{\frac{0.6}{x}}(0.6+0.4x)>0$,所以 $f(x)=e^{\frac{0.6}{x}}\ln x$ 在

$(0,+\infty)$上单调递增,所以 $f(3)>f(2)>f(1.5)$,即 $e^{0.2}\ln 3>e^{0.3}\ln 2>e^{0.4}\ln 1.5$. 因为 $1.5^3=3.375>e$,所以 $\ln 1.5>\frac{1}{3}$,则 $e^{0.4}\ln 1.5>\frac{e^{0.4}}{3}$,故 $a>b>c$.

13. $y=x+1$　因为 $f(x)=x+\cos x$,所以 $f'(x)=1-\sin x$,则 $f(0)=1$,$f'(0)=1$,故 $f(x)$的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y=x+1$.

14. 96;60　由题可知,满足条件的四位数共有 $4\times4\times3\times2=96$ 个,其中偶数共有 $A_4^3+C_2^1C_3^1A_3^2=60$ 个.

15. $\sqrt{2}$　如图,设 O 为正四面体 $S-ABC$ 的内切球球心,也是外接球球心,D 为$\triangle ABC$ 的外心,$OG\perp SA$,垂足为 G. 易知 $AD=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,$SD=\frac{4\sqrt{6}}{3}$. 因为 $SO=AO$,所以 $SO^2=(SD-SO)^2+AD^2$,解得 $SO=\sqrt{6}$. 因为$\sin\angle ASD=\frac{AD}{SA}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以$\frac{OG}{SO}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $OG=\sqrt{2}$,即该四面体内切球的球心到其一条侧棱的距离为$\sqrt{2}$.



16. $(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$　因为 $a_na_{n+2}=ka_{n+1}^2$,所以$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=k\frac{a_{n+1}}{a_n}$. 又 $a_1=1$,$a_2=64$,所以$\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}$是首项为 64,公比为 k 的等比数列,则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=64k^{n-1}=2^6k^{n-1}$,则 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^6k^{n-2}\cdot2^6k^{n-3}\cdot\cdots\cdot2^6k^0\cdot1=2^{6n-6}k^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}$. 因为 a_5 是$\{a_n\}$唯一的最大项,所以$\begin{cases}a_5>a_6,\\a_5>a_4,\end{cases}$即$\begin{cases}2^{24}k^6>2^{18}k^3,\\2^{24}k^6>2^{30}k^{10},\end{cases}$解得$\frac{1}{4}<k<\frac{\sqrt{2}}{4}$.

17. 解:(1)因为$\sum_{i=1}^{5}r_i=30.5$,所以 $\bar{r}=\frac{30.5}{5}=6.1$. ………………………… 1 分

又 $\bar{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,$\sum_{i=1}^{5}t_ir_i=98.1$, ………………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_ir_i-5\bar{t}\bar{r}}{\sum_{i=1}^{5}t_i^2-5\bar{t}^2}=\frac{98.1-5\times3\times6.1}{55-5\times3^2}=0.66$, ………………………… 4 分

$\hat{a}=\bar{r}-\hat{b}\,\bar{t}=6.1-0.66\times3=4.12$. ………………………… 5 分

故 r 关于 t 的线性回归方程为 $\hat{r}=0.66t+4.12$. ………………………… 6 分

(2)由(1)可知,当 $t=8$ 时,$\hat{r}=0.66\times8+4.12=9.4<10$, ………………………… 8 分

当 $t=9$ 时,$\hat{r}=0.66\times9+4.12=10.06>10$. ………………………… 10 分

故估计该零件使用 8 年后需要进行报废处理. ………………………… 12 分

18. 解:(1)因为 $BD=2$,$DE=EC=1$,$\angle BAD=\angle CAE$,

所以$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle AEC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle BAD}{\frac{1}{2}AC\cdot AE\cdot\sin\angle EAC}=\frac{AB\cdot AD}{AC\cdot AE}=\frac{2}{1}$, ………………………… 2 分

$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AE\cdot\sin\angle BAE}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle DAC}=\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AD}=\frac{3}{2}$, ………………………… 4 分

故$\frac{AB^2}{AC^2}=3$,即$\frac{AB}{AC}=\sqrt{3}$, ………………………… 5 分

则在$\triangle ABC$ 中,根据正弦定理可得,$\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{AC}=\sqrt{3}$. ………………………… 6 分

(2)设 $AC=x$,则 $AB=\sqrt{3}x$,由$\begin{cases}x+\sqrt{3}x>4,\\\sqrt{3}x-x<4,\end{cases}$解得 $2(\sqrt{3}-1)<x<2(\sqrt{3}+1)$. ………………………… 7 分

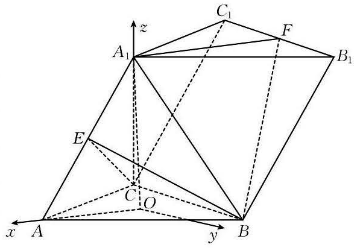
在$\triangle ABC$ 中,$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{x^2+8}{4\sqrt{3}x}$, ………………………… 8 分

则 $\sin^2\angle ABC=1-\cos^2\angle ABC=\dfrac{-x^4+32x^2-64}{48x^2}$. ………………………… 9 分

$S^2_{\triangle ABC}=(\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin\angle ABC)^2=\dfrac{-x^4+32x^2-64}{4}=\dfrac{-(x^2-16)^2+192}{4}$. ………… 10 分

由 $2(\sqrt{3}-1)<x<2(\sqrt{3}+1)$,得 $16-8\sqrt{3}<x^2<16+8\sqrt{3}$, ………………………… 11 分

则 $0<S^2_{\triangle ABC}\leqslant 48$,故$\triangle ABC$ 面积的取值范围为$(0,4\sqrt{3}]$. ………………………… 12 分



19.(1)证明:连接 A_1C,CE,因为$\angle BAA_1=\angle CAA_1=\dfrac{\pi}{3}$,所以$\triangle A_1AC$ 与$\triangle A_1AB$ 均为正三角形. ………………………… 1 分

因为 E 为 AA_1 的中点,所以 $AA_1\perp CE,AA_1\perp BE$. ………… 2 分

又 $CE\cap BE=E$,所以 $AA_1\perp$平面 BCE. ………………… 3 分

因为 $BC\subset$平面 BCE,所以 $AA_1\perp BC$. ………………… 4 分

又 $AA_1/\!/CC_1$,所以 $CC_1\perp BC$,则四边形 BB_1C_1C 为矩形. ……… 5 分

因为$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$,$AB=AC=AA_1=2$,所以 $BC=AA_1=CC_1$,故四边形 BB_1C_1C 为正方形. …………… 6 分

(2)解:由题可知,四面体 A_1ABC 为正四面体,以$\triangle ABC$ 的中心点 O 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,0)$,$A_1(0,0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$,$E(\dfrac{\sqrt{3}}{3},0,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$,$F(-\sqrt{3},0,\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$, ………………………… 7 分

$\overrightarrow{BE}=(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-1,\dfrac{\sqrt{6}}{3})$,$\overrightarrow{BF}=(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3},-1,\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$,$\overrightarrow{BA_1}=(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$. ………………………… 8 分

设平面 BFA_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x-y+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}x-y+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=\sqrt{6}$,得 $\boldsymbol{m}=(0,4,\sqrt{6})$. … 10 分

设直线 BE 与平面 BFA_1 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\overrightarrow{BE}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{22}}=\dfrac{\sqrt{66}}{33}$. ………………… 12 分

20.解:(1)由题可知$\begin{cases}2a=4,\\ \dfrac{ab}{2}=\sqrt{3},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ ………………………… 2 分

解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$ ………………………… 3 分

故椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ………………………… 4 分

(2)由题可知,直线 l 的斜率一定存在,设 l 的方程为 $y=k(x-2)+3$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

联立方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=k(x-2)+3,\end{cases}$ 消去 y 整理得$(3+4k^2)x^2+8k(3-2k)x+16k^2-48k+24=0$. ………… 5 分

$\Delta=[8k(3-2k)]^2-4(3+4k^2)(16k^2-48k+24)=32(18k-9)>0$,解得 $k>\dfrac{1}{2}$,

$x_1+x_2=\dfrac{8k(2k-3)}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{16k^2-48k+24}{3+4k^2}$. ………………………… 7 分

直线 AQ 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$,令 $x=x_1$,得 $y=\dfrac{y_2(x_1-2)}{x_2-2}$,即点 M 的坐标为$(x_1,\dfrac{y_2(x_1-2)}{x_2-2})$,则点 N 的坐标为$(x_1,\dfrac{x_1y_2+x_2y_1-2y_1-2y_2}{2(x_2-2)})$. ………………………… 9 分

直线 AN 的斜率 $k_{AN}=\frac{x_1y_2+x_2y_1-2y_1-2y_2}{2(x_1-2)(x_2-2)}=\frac{2kx_1x_2+(3-4k)(x_1+x_2)+8k-12}{2x_1x_2-4(x_1+x_2)+8}$

$=\frac{2k(16k^2-48k+24)+(3-4k)(16k^2-24k)+(8k-12)(3+4k^2)}{2(16k^2-48k+24)-4(16k^2-24k)+8(3+4k^2)}=\frac{-36}{72}=-\frac{1}{2}$. …………………… 11 分

故直线 AN 的斜率为定值，且该定值为 $-\frac{1}{2}$. …………………… 12 分

21. (1)解：因为 $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+ax,x>0$，所以 $f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^3}}+a=\frac{a\sqrt{x^3}-1}{\sqrt{x^3}}$. …………………… 1 分

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. …………………… 3 分

当 $a>0$ 时，由 $a\sqrt{x^3}-1=0$，解得 $x=\frac{\sqrt[3]{a}}{a}$，则 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\sqrt[3]{a}}{a})$ 上单调递减，在 $(\frac{\sqrt[3]{a}}{a},+\infty)$ 上单调递增. …… …………………… 5 分

(2)证明：当 $a=1$ 时，由(1)可知，$f(x)\geqslant f(1)=3$，即 $\frac{2}{\sqrt{x}}+x\geqslant 3$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立， ……… 7 分

则 $2\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}}+\frac{n^2+n+1}{n^2+n}>3$，则 $\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}}>1-\frac{1}{2n(n+1)}=1-\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，…………………… 8 分

则 $\sqrt{\frac{1^2+1}{1^2+1+1}}+\sqrt{\frac{2^2+2}{2^2+2+1}}+\cdots+\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}}>n-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n+1})>n-\frac{1}{2}>n-1$. …………………… 9 分

又 $\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}}<1$，所以 $\sqrt{\frac{1^2+1}{1^2+1+1}}+\sqrt{\frac{2^2+2}{2^2+2+1}}+\cdots+\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}}<n$，…………………… 10 分

故 $n-1<\sqrt{\frac{1^2+1}{1^2+1+1}}+\sqrt{\frac{2^2+2}{2^2+2+1}}+\cdots+\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}}<n$，从而 $[\sqrt{\frac{1^2+1}{1^2+1+1}}+\sqrt{\frac{2^2+2}{2^2+2+1}}+\cdots+\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+n+1}}]=n-1$. …………………… 12 分

22. 解：(1)因为 $x=\frac{2-2t}{1+t}=\frac{4}{1+t}-2\neq -2$ …………………… 1 分

所以 C_1 的普通方程为 $mx-4y+2m=0(x\neq -2)$. …………………… 3 分

因为 $\rho=2\cos\theta$，所以 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，…………………… 4 分

故 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=0$. …………………… 5 分

(2)因为 C_1 与 C_2 有公共点，且点 $(-2,0)$ 不在 C_2 上，所以 $\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+16}}\leqslant 1$，…………………… 8 分

解得 $-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2}$，故 m 的取值范围为 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$. …………………… 10 分

23. 解：(1)因为 $a=1$，所以 $f(x)=|2x-1|+|x-3|$.

当 $x\geqslant 3$ 时，原不等式转化为 $3x-4\leqslant 4$，不等式无解. …………………… 2 分

当 $\frac{1}{2}<x<3$ 时，原不等式转化为 $x+2\leqslant 4$，解得 $\frac{1}{2}<x\leqslant 2$. …………………… 3 分

当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，原不等式转化为 $-3x+4\leqslant 4$，解得 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. …………………… 4 分

综上所述，不等式 $f(x)\leqslant 4$ 的解集为 $[0,2]$. …………………… 5 分

(2)因为 $f(x)-|x-\frac{a}{2}|=|x-\frac{a}{2}|+|x-3a|\geqslant|\frac{5a}{2}|$，所以 $f(x)\geqslant|x-\frac{a}{2}|+a^2+1$ 恒成立等价于 $|\frac{5a}{2}|\geqslant a^2+1$. …………………… 7 分

当 $a\geqslant 0$ 时，则 $\frac{5a}{2}\geqslant a^2+1$，解得 $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 2$. …………………… 8 分

当 $a<0$ 时，则 $-\frac{5a}{2}\geqslant a^2+1$，解得 $-2\leqslant a\leqslant -\frac{1}{2}$. …………………… 9 分

综上所述，a 的取值范围为 $[-2,-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2]$. …………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。