1号卷·A10联盟2023届高三上学期11月段考

数学试题

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 舒城中学 太湖中学 天长中学 屯溪一中
宣城中学 滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中 合肥六中 太和中学 合肥七中

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

第Ⅰ卷（选择题 共60分）

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 若集合 $A=\{x|(x-2)(2x-1)\leqslant 0\}$，$B=\{y|y=2^x+1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(1,2]$　　B. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　　C. $[1,2]$　　D. $(2,+\infty)$

2. 已知向量 $\boldsymbol{m}=(2,-3)$，$\boldsymbol{n}=(1,1)$，若 $(\lambda\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\perp\boldsymbol{n}$，则实数 λ 的值为（　　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

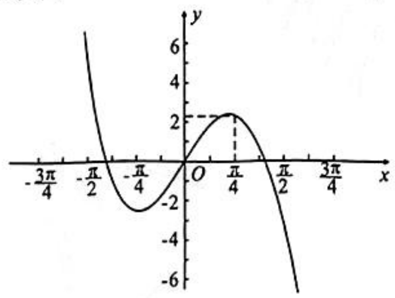
3. 中国古代著作《张丘建算经》有这样一个问题："今有马行转迟，次日减半疾，七日行七百里"，意思是说有一匹马行走的速度逐渐减慢，每天行走的里程是前一天的一半，七天一共行走了700里路，则该马第六天走的里程数为（　　）

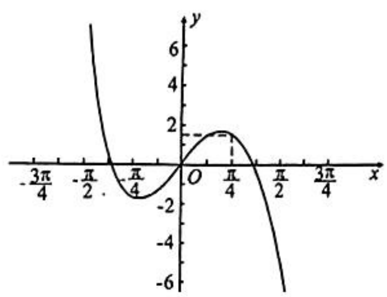
A. $\frac{350}{127}$　　B. $\frac{700}{127}$　　C. $\frac{1400}{127}$　　D. $\frac{2800}{127}$

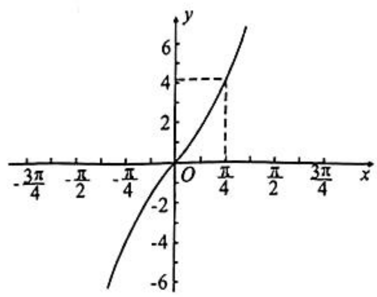
4. 若 $\sqrt{6}\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha=1$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$（　　）

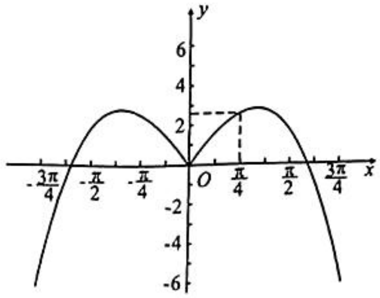
A. $-\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

5. 函数 $f(x)=\sin 2x-2x^3+3x$ 的图象大致为（　　）

A.


B.


C.


D.


6. 若正实数x,y满足$2x+y=xy$，则$x+2y$（　　）

A. 有最小值8　　B. 有最小值9　　C. 有最大值8　　D. 有最大值9

7. 已知$f(x)=2022^{-x}-2022^{x}$，$0<x<\frac{\pi}{2}$，$a=\sin x$，$b=\ln\sin x$，$c=e^{\sin x}$，则（　　）

A. $f(a)<f(c)<f(b)$　　B. $f(b)<f(c)<f(a)$

C. $f(c)<f(a)<f(b)$　　D. $f(b)<f(a)<f(c)$

8. 若函数$f(x)=x^2-1$与$g(x)=a\ln x-1$的图象存在公共切线，则实数a的最大值为（　　）

A. $2e$　　B. e　　C. $\sqrt{e}$　　D. e^2

二、选择题（本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.）

9. 若复数$z=i-2$，则下列结论正确的是（　　）

A. z的虚部是-2　　B. z的共轭复数是$-i-2$

C. z的模是$\sqrt{5}$　　D. z在复平面内对应的点为$(-2,1)$

10. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，则下列四个条件中能够使角A被唯一确定的是（　　）

A. $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\cos B=-\frac{1}{2},b=3a$　　D. $\angle C=45^\circ,b=2,c=\sqrt{3}$

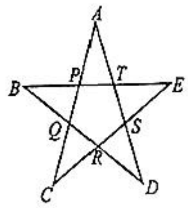
11. 庄严美丽的国旗和国徽上的五角星是革命和光明的象征，正五角星（5个顶点构成正五边形）是一个非常优美的几何图形，且与黄金分割有着密切的联系.在如图所示的正五角星中，$\frac{PT}{AT}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则（　　）

A. $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{RQ}=0$

B. $\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{RS}$

C. $\overrightarrow{AT}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{TS}$

D. $\overrightarrow{CQ}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{TP}$



12. 已知函数$f(x)=\left|\sin\frac{x}{3}\right|+\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$，则（　　）

A. $f(x)$的最小正周期为3π　　B. $f(x)$的最大值为$\sqrt{3}$

C. $f(x)$在$[5\pi,7\pi]$上单调递减　　D. $f(x)$在$[-4\pi,4\pi]$上有4个零点

第II卷（非选择题　共90分）

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．将答案填写在题中的横线上．）

13. 命题："$\exists x\in(0,+\infty)$，$\ln x+\sin 2x-5<0$"的否定为______．

14. 若向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，则$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$______．

15. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且a_1,a_2,a_3成等差数列，若$2S_{n+1}+1=S_n+S_{n+2}$，则使得$S_k=0,a_{k+1}=4$同时成立的k的值为______．

16. 在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$a\sin(B+\pi)+b\cos\left(\frac{5\pi}{6}-A\right)=0$，$a=10$，若点$M$满足$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$，且$\angle MAB=\angle MBA$，则$\triangle AMC$的面积为______．

三、解答题（本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

17.（本小题满分10分）

已知函数$f(x)=\log_a(3-x)+\log_a(x+1)$，其中$a>0$且$a\neq1$．

（1）求$f(x)$的定义域及其图象的对称轴方程；

（2）若$f(x)$的最大值为2，求a的值．

18.（本小题满分12分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，其中$a_3=17$，$S_7=147$；等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n，其中$b_3=\frac{2}{9}$，$b_6=\frac{2}{243}$．

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$c_n=a_n+T_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项和Q_n．

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2\ln x+(a+3)x$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

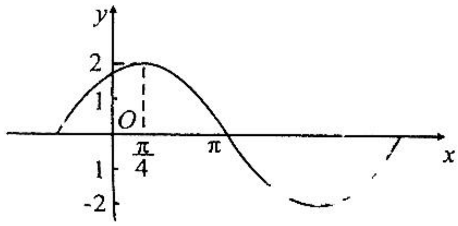
（2）若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 3x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，求 a 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 的部分图象如图所示.

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{2}{3}$（纵坐标不变），得到函数 $g(x)$ 的图象，求函数 $y=g(x)\cdot\sin x$（$x\in\left[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$）的值域.



21.（本小题满分 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{\sin C-\sin B}{\sin A}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin B+\sin C}$

（1）求角 C 的大小；

（2）求 $\frac{\sin 2B+2}{\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)}$ 的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x-1)^2e^x$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）判断函数 $g(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2+f(x)$ 的零点个数，并说明理由.

皖名卷·A10联盟2023届高三上学期11月段考

数学参考答案

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	D	A	B	C	A

1. A　由题意得，$A=\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$，$B=\{y|y>1\}$，$\therefore A\cap B=(1,2]$，故选A.

2. D　由题意得，$\lambda\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}=(2\lambda-1,-3\lambda-1)$，$\because(\lambda\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n})\perp\boldsymbol{n}$，$\therefore 2\lambda-1-3\lambda-1=0$，$\therefore\lambda=-2$，故选D.

3. C　由题意得，该马第n天走的里程数构成公比为$\frac{1}{2}$的等比数列$\{a_n\}$，则$\frac{a_1\left(1-\frac{1}{2^7}\right)}{1-\frac{1}{2}}=700$，解得

$a_1=\frac{2^7\times 350}{127}$，故该马第六天走了$\frac{2^7\times 350}{127}\times\frac{1}{2^5}=\frac{1400}{127}$里路. 故选C.

4. D　$\because\sqrt{6}\sin\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1$，$\therefore\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)=\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{4}$，故选D.

5. A　$\because f(-x)=\sin(-2x)-2(-x)^3+3(-x)=-f(x)$，$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$\therefore f(x)$为奇函数，图象关于原点对称，排除D；$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi^3}{32}+\frac{3\pi}{4}>2$，排除B；$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^3}{4}+\frac{3\pi}{2}<0$，排除C. 故选A.

6. B　由$2x+y=xy$得$\frac{2}{y}+\frac{1}{x}=1$，则$x+2y=(x+2y)\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}+5\geqslant 2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}+5=9$，当且仅当$x=y=3$时等号成立，故$x+2y$有最小值9. 故选B.

7. C　$\because f(x)=2022^{-x}-2022^x=\left(\frac{1}{2022}\right)^x-2022^x$，$\therefore f(x)$在$\mathbf{R}$上是减函数. $\because 0<x<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore 0<a=\sin x<1$，$\therefore b=\ln\sin x<0$，$c=e^{\sin x}>1$，$\therefore b<a<c$，$\therefore f(b)>f(a)>f(c)$，故选C.

8. A　由题意得，$f'(x)=2x$，$g'(x)=\frac{a}{x}$. 设公切线与$f(x)=x^2-1$的图象切于点(x_1,x_1^2-1)，与

$g(x)=a\ln x-1$的图象切于点$(x_2,a\ln x_2-1)$，$\therefore 2x_1=\frac{a}{x_2}=\frac{(a\ln x_2-1)-(x_1^2-1)}{x_2-x_1}=\frac{a\ln x_2-x_1^2}{x_2-x_1}$，

$\therefore a=2x_1x_2\neq 0$，$\therefore 2x_1=\frac{2x_1x_2\ln x_2-x_1^2}{x_2-x_1}$，$\therefore x_1=2x_2-2x_2\ln x_2$，$\therefore a=2x_1x_2=4x_2^2-4x_2^2\ln x_2$.

设$h(x)=4x^2-4x^2\ln x$，则$h'(x)=4x(1-2\ln x)$，$\therefore h(x)$在$(0,\sqrt{e})$上单调递增，在$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递减，$\therefore h(x)_{\max}=h(\sqrt{e})=2e$，$\therefore$实数$a$的最大值为$2e$，故选A.

二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.）

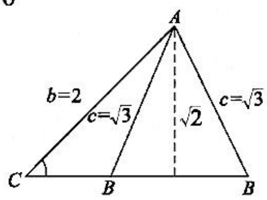
题号	9	10	11	12
答案	BCD	BC	AC	BD

9. BCD $\because z=\mathrm{i}-2=-2+\mathrm{i}$，$\therefore z$ 的虚部是1，共轭复数是$-\mathrm{i}-2$，$|z|=\sqrt{(-2)^2+1}=\sqrt{5}$，在复平面内对应的点为$(-2,1)$. 故选 BCD.

10. BC $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $A=\dfrac{\pi}{3}$或$\dfrac{2\pi}{3}$，故 A 错误； $\cos A=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $A=\dfrac{5\pi}{6}$，故 B 正确；

$\cos B=-\dfrac{1}{2},b=3a$，则 $B=\dfrac{2\pi}{3},A\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right),\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because b=3a$，$\therefore \sin B=3\sin A$，$\therefore \sin A=\dfrac{\sin B}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，



则角A 被唯一确定，故 C 正确；$\angle C=45°,b=2,c=\sqrt{3}$，

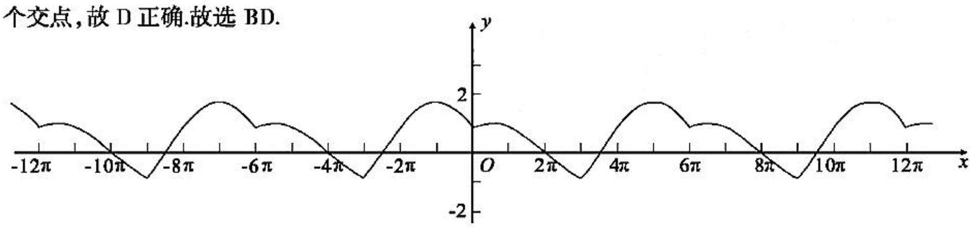
$\because b\sin C=\sqrt{2}<c<b$，$\therefore$如图所示，角 A 不唯一，故 D 错误. 故选 BC.

11. AC 由图可知，$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{CR}+\overrightarrow{RQ}=\mathbf{0}$，故 A 正确；$\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AR}$，$\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{BS}$，故 B 错误；$\because \dfrac{AT}{TS}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\therefore \overrightarrow{AT}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{TS}$，故 C 正确；$\overrightarrow{CQ}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{CQ}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\overrightarrow{TS}=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{PT}$，故 D 错误. 故选 AC.

12. BD $f(x+6\pi)=\left|\sin\left(\dfrac{x}{3}+2\pi\right)\right|+\cos\left(\dfrac{x}{3}+2\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{x}{3}\right|+\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=f(x)$；当 $x\in[0,3\pi]$时，

$f(x)=\sin\dfrac{x}{3}+\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{x}{3}=\sin\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in(3\pi,6\pi]$时，

$f(x)=-\sin\dfrac{x}{3}+\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{3}{2}\sin\dfrac{x}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{x}{3}=\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{\pi}{3}\right)$，作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，观察可知，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 6π，故 A 错误；函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$，故 B 正确；函数 $f(x)$ 在 $[5\pi,7\pi]$ 上先减再增再减，故 C 错误；$f(x)$ 与 x 轴在 $[-4\pi,4\pi]$ 上有 4 个交点，故 D 正确.故选 BD.



三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. $\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x+\sin 2x-5\geqslant 0$

存在量词命题的否定为全称量词命题，且只否定结论，故“$\exists x\in(0,+\infty)$，$\ln x+\sin 2x-5<0$”的否定为“$\forall x\in(0,+\infty)$，$\ln x+\sin 2x-5\geqslant 0$”.

14. $2\sqrt{7}$

$\because |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$，$\therefore (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4=4$，$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，

$\therefore (\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=4-4\times(-2)+4\times4=28$，$\therefore |\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$.

15. 7

$S_{n+1}-S_n+1=S_{n+2}-S_{n+1}$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}=1$，又 $2a_2=a_1+a_3$，即 $a_2-a_1=a_3-a_2$，故数列 $\{a_n\}$ 是公差为1的等差数列，则 $\begin{cases} S_k=ka_1+\dfrac{k(k-1)}{2}=0 \\ a_{k+1}=a_1+k=4 \end{cases}$，解得 $a_1=-3, k=7$.

16. $\dfrac{30\sqrt{3}}{7}$

$\because a\sin(B+\pi)+b\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-A\right)=0$，$\therefore a\sin B=b\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-A\right)$，

$\therefore \sin A\sin B=\sin B\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-A\right)$，$\because \sin B\neq 0$，$\therefore \sin A=\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}-A\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A$，

$\therefore \sin A=-\sqrt{3}\cos A$，$\therefore \tan A=-\sqrt{3}$，$\therefore A=\dfrac{2\pi}{3}$. 在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=\dfrac{b^2+100-c^2}{20b}$，在 $\triangle ACM$ 中，$\cos C=\dfrac{b^2+36-16}{12b}$，联立两式，整理得 $2b^2+3c^2=200$①；在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$b^2+c^2+bc=100$②，解得 $b=\dfrac{10}{\sqrt{7}}$，$c=\dfrac{20}{\sqrt{7}}$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{10}{\sqrt{7}}\times\dfrac{20}{\sqrt{7}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{50\sqrt{3}}{7}$，

$\because \overrightarrow{BM}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$，$\therefore S_{\triangle ACM}=\dfrac{3}{5}S_{\triangle ABC}=\dfrac{30\sqrt{3}}{7}$.

四、解答题（本大题共6小题，共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分10分）

（1）由题意得，$\begin{cases} 3-x>0 \\ x+1>0 \end{cases}$，解得 $-1<x<3$，

故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,3)$. ……………………3分

又 $f(2-x)=\log_a[3-(2-x)]+\log_a(2-x+1)=\log_a(x+1)+\log_a(3-x)=f(x)$，

$(-1,3)$ 关于 $x=1$ 对称，

$\therefore f(x)$ 图象的对称轴方程为 $x=1$. ……………………5分

（2）由（1）知，$f(x)=\log_a\left[-(x-1)^2+4\right]$，

当 $x\in(-1,3)$ 时，$-x^2+2x+3\in(0,4]$，……………………7分

$\because$ 函数 $f(x)$ 的最大值为2，$\therefore a>1$ 且 $\log_a 4=2$，解得 $a=2$. ……………………10分

18.（本小题满分12分）

（1）记等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

由题意得，$S_7=7a_4=147$，解得 $a_4=21$，$\therefore d=a_4-a_3=4$，

$\therefore a_n=a_3+(n-3)d=17+4(n-3)=4n+5$. ……………………3分

$\because \dfrac{b_6}{b_3}=\dfrac{\frac{2}{243}}{\frac{2}{9}}=\dfrac{1}{27}=q^3$，$\therefore q=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore b_n=b_3q^{n-3}=\dfrac{2}{9}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3}=\dfrac{2}{3^{n-1}}$. ……………………6分

（2）由（1）得，$b_1=2$，$T_n=\dfrac{2\cdot\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}=3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$，……………………8分

$\therefore c_n=4n+5+3-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=4n-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}+8$，

$\therefore Q_n=4(1+2+\cdots+n)-\left[1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right]+(8+8+\cdots+8)$

$=4\cdot\dfrac{(1+n)n}{2}-\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}+8n=2n^2+10n+\dfrac{1}{2\cdot 3^{n-1}}-\dfrac{3}{2}$. ……………………12分

19.（本小题满分12分）

（1）由题意得，$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\dfrac{2}{x}+(a+3)=\dfrac{(a+3)x+2}{x}$.

当$a+3\geqslant 0$，即$a\geqslant -3$时，$f'(x)>0$，故函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；……………………2分

当$a+3<0$，即$a<-3$时，令$f'(x)=0$，解得$x=-\dfrac{2}{a+3}$，

故当$x\in\left(0,-\dfrac{2}{a+3}\right)$时，$f'(x)>0$，当$x\in\left(-\dfrac{2}{a+3},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$，

故函数$f(x)$在$\left(0,-\dfrac{2}{a+3}\right)$上单调递增，在$\left(-\dfrac{2}{a+3},+\infty\right)$上单调递减；

综上所述，当$a\geqslant -3$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；当$a<-3$时，$f(x)$在$\left(0,-\dfrac{2}{a+3}\right)$上单调递增，在$\left(-\dfrac{2}{a+3},+\infty\right)$上单调递减. ……………………6分

（2）若关于x的不等式$f(x)\geqslant 3x$在$(0,+\infty)$上有解，

则$a\geqslant -\dfrac{2\ln x}{x}$在$(0,+\infty)$上有解，$\therefore a\geqslant\left(-\dfrac{2\ln x}{x}\right)_{\min}$. ……………………8分

记$g(x)=-\dfrac{2\ln x}{x}$，则$g'(x)=\dfrac{2(\ln x-1)}{x^2}$，

故当$x\in(0,\mathrm{e})$时，$g'(x)<0$，当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$g'(x)>0$，

故函数$g(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递减，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递增，

$\therefore g(x)_{\min}=g(\mathrm{e})=-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$，故实数$a$的取值范围$\left[-\dfrac{2}{\mathrm{e}},+\infty\right)$. ……………………12分

20.（本小题满分12分）

（1）由题图知，$A=2$，周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=4\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=3\pi$，$\therefore\omega=\dfrac{2}{3}$，

则$f(x)=2\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\varphi\right)$. ……………………2分

$\because$当$x=\dfrac{\pi}{4}$时，$y=2\sin\left(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\pi}{4}+\varphi\right)=2$，即$\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\varphi\right)=1$，

$\therefore\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即$\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，……………………4分

$\because 0<\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=2\sin\left(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. ……………………5分

（2）由题意得，$g(x)=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore y=g(x)\cdot\sin x=2\sin x\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2\sin x\left(\dfrac{1}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$

$=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}$，……………………9分

$\because x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$，$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$，$\therefore\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right]$，

$\therefore\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{2}\in\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right]$，

即函数$y=g(x)\sin x$（$x\in\left[-\dfrac{\pi}{12},\dfrac{5\pi}{12}\right]$）的值域为$\left[\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right]$. ……………………12分

21.（本小题满分12分）

（1）设内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，

由正弦定理及$\dfrac{\sin C-\sin B}{\sin A}=\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin B+\sin C}$，整理得$a^2+b^2-c^2=-ab$，……………2分

由余弦定理得$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{ab}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，

又$0<C<\pi$，$\therefore C=\dfrac{2\pi}{3}$. ……………………4分

（2）由（1）知，$B\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore B+\dfrac{\pi}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{12}\right)$. ……………………5分

令$t=\sin B+\cos B$，$\therefore t=\sin B+\cos B=\sqrt{2}\sin\left(B+\dfrac{\pi}{4}\right)\in\left(1,\sqrt{2}\right]$. ……………………7分

$$\therefore \frac{\sin 2B+2}{\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(\sin 2B+2\right)}{\sin B+\cos B}=\frac{\sqrt{2}\left(2\sin B\cos B+2\right)}{\sin B+\cos B}=\sqrt{2}\cdot\frac{\left(\sin B+\cos B\right)^2+1}{\sin B+\cos B}$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin B+\cos B+\frac{1}{\sin B+\cos B}\right)=\sqrt{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$ ……………………10 分

$\because$ 函数 $y=t+\frac{1}{t}$ 在 $\left(1,\sqrt{2}\right]$ 上单调递增， $\therefore y=\sqrt{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\in\left(2\sqrt{2},3\right]$.

即 $\frac{\sin 2B+2}{\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)}$ 的取值范围为 $\left(2\sqrt{2},3\right]$. ……………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

（1）$f'(x)=(x-1)^2e^x+2(x-1)e^x=(x+1)(x-1)e^x$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$ 或 $x>1$，令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<1$，

则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增， $(-1,1)$ 上单调递减，$(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，在 $x=1$ 取得极小值，……………………3 分

$\therefore f(x)$ 的极大值为 $f(-1)=\frac{4}{e}$，极小值为 $f(1)=0$. ……………………4 分

（2）由题意得，$g(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2+(x-1)^2e^x$，定义域为$(0,+\infty)$，

$\therefore g'(x)=\frac{1}{x}-x+\left(x^2-1\right)e^x=(x+1)(x-1)\left(e^x-\frac{1}{x}\right)$. ……………………5 分

设 $h(x)=e^x-\frac{1}{x}(x>0)$，$\therefore h'(x)=e^x+\frac{1}{x^2}>0$，$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\because h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0, h(1)=e-1>0$，$\therefore$ 存在唯一 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $h\left(x_0\right)=0$，

即 $e^{x_0}-\frac{1}{x_0}=0, e^{x_0}=\frac{1}{x_0}, -x_0=\ln x_0$， ……………………7 分

当 $0<x<x_0$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)>0$，当 $x_0<x<1$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)<0$，

当 $x>1$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x=x_0$ 时，$g(x)$ 取得极大值，且极大值为

$g\left(x_0\right)=\ln x_0-\frac{1}{2}x_0^2+\left(x_0-1\right)^2e^{x_0}=-\frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{x_0}-2$. ……………………9 分

设 $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{x}-2\left(\frac{1}{2}<x<1\right)$，易得 $F(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，

$\therefore F(x)<F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}<0$，$\therefore g(x)$ 在 $(0,1)$ 上无零点. ……………………11 分

$\because g(1)=-\frac{1}{2}<0, g(2)=e^2-2+\ln 2>0$，$\therefore g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个零点.

综上所述，$g(x)$ 有且只有一个零点. ……………………12 分

以上各解答题如有不同解法并且正确，请按相应步骤给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。