梧州市2023届高三第三次模拟测试

理科数学参考答案

1. B 【解析】因为 $A=\{x\mid -2<x\leqslant 1\}$，$B=\{-2,-1,0,1\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$. 故选 B.

2. C 【解析】由 $\frac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}-1=2\mathrm{i}$，得 $a+\mathrm{i}=(1-\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})=3+\mathrm{i}$，所以 $a=3$. 故选 C.

3. B 【解析】若从24个节气中任选2个节气，基本事件总数有 $C_{24}^{2}=\frac{24\times 23}{2\times 1}=276$ 种情况，2个节气恰好在一个季节包含的基本事件个数有 $C_{4}^{1}C_{6}^{2}=4\times\frac{6\times 5}{2\times 1}=60$ 个，所以2个节气恰好在一个季节的概率 $P=\frac{60}{276}=\frac{5}{23}$，故选 B.

4. D 【解析】因为 $\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{3}{5}$，所以 $\sin 2\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-2\alpha)=\cos 2(\frac{\pi}{4}-\alpha)=2\cos^{2}(\frac{\pi}{4}-\alpha)-1=2\times\frac{9}{25}-1=-\frac{7}{25}$. 故选 D.

5. A 【解析】因为 $f(-x)=-x(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x})=x(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$，所以函数 $y=x(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$ 是偶函数，其图象关于 y 轴对称，所以排除CD选项；又 $x>0$ 时，$\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}>0$，所以 $y>0$，排除 B.

6. C 【解析】由题可得 $\frac{T}{S+1}=\frac{2^{9689}-1}{2^{4423}}\approx 2^{5266}$. 令 $2^{5266}=k$，则可得 $5266\lg 2=\lg k$. 因为 $\lg 2\approx 0.301$，所以 $5266\lg 2\approx 1585$. 即 $\lg k\approx 1585$，所以 $k\approx 10^{1585}$. 故选 C.

7. D 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(m,3)$，所以 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2-m,1)$. 又因为 $\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=2-m+2=0$，解得 $m=4$，即 $\boldsymbol{b}=(4,3)$，故 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{10}{\sqrt{5}\times 5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

8. C 【解析】等差数列 $\{a_n\}$，$a_2=20$，$a_4=14$，$\begin{cases}a_1+d=20,\\ a_1+3d=14,\end{cases}$ 解得 $d=-3$，$a_1=23$，则 $S_n=23n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-3)=\frac{49}{2}n-\frac{3}{2}n^2<0$，解得 $n>\frac{49}{3}$，又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\geqslant 17$，则 n 的最小值为17. 故选 C.

9. C 【解析】根据题意，得点 $(3,b)$ 在直线 $l:2x+y-2=0$ 上，所以 $2\times 3+b-2=0$，所以 $b=-4$，故圆 C 的圆心坐标为 $C(3,-4)$，半径为 $r=\sqrt{6}$. 由直线 $l:2x+y-2=0$ 得直线 l 与 x 轴的交点为 $P(1,0)$，所以 $|PC|=2\sqrt{5}$，所以圆心到直线 l' 的距离为 $|PC|\sin 30°=\sqrt{5}$，故直线 l' 被圆 C 截得的弦长为 $2\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}=2$. 故选 C.

10. A 【解析】根据函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$ 的部分图象知，

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，则有 $\frac{T}{4}=\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$，所以 $T=2$，

所以 $|f(x)|$ 的最小正周期为1，故①错误；

因为$\frac{2\pi}{\omega}=T=2$,所以$\omega=\pi$,$A=1$,

因为$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<0)$经过$(\frac{3}{4},0)$与$(\frac{5}{4},-1)$,

所以$\begin{cases}\cos(\frac{3\pi}{4}+\varphi)=0,\\ \cos(\frac{5\pi}{4}+\varphi)=-1,\end{cases}$ 因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$,所以$\varphi=-\frac{\pi}{4}$,

则函数为$f(x)=\cos(\pi x-\frac{\pi}{4})$.当$x=-\frac{9}{4}$时,$f(x)=0$,

所以点$(-\frac{9}{4},0)$为函数$f(x)$的一个对称中心,故②正确;

函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{3}{2}$个单位后得到$y=\cos[\pi(x+\frac{3}{2})-\frac{\pi}{4}]=\sin(\pi x-\frac{\pi}{4})$,

故③正确;

对于④,令$\pi x-\frac{\pi}{4}=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,得$f(x)$的最大值点在$x=\frac{1}{4}+2k,k\in\mathbf{Z}$,

因为$f(x)$在区间$[0,m]$有且仅有3个最大值点,故$m\in[\frac{17}{4},\frac{25}{4})$,

所以$-\frac{3}{25}m\in(-\frac{3}{4},-\frac{51}{100}]$,

$f(x)$的单调增区间为$[2k-\frac{3}{4},2k+\frac{1}{4}],k\in\mathbf{Z}$,令$k=0$,则增区间为$[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}]$,

显然$[-\frac{3}{25}m,0]\subsetneqq[-\frac{3}{4},\frac{1}{4}]$,故④正确.

故错误的只有①.

11. A 【解析】因为$\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{F_2A}$,所以$\triangle F_1AF_2\backsim\triangle F_1BC$,设$|F_1F_2|=2c$,则$|F_2C|=4c$,
设$|AF_1|=t$,则$|BF_1|=3t$,$|AB|=2t$.因为BF_2平分$\angle F_1BC$,
由角平分线定理可知,
$\frac{|BF_1|}{|BC|}=\frac{|F_1F_2|}{|F_2C|}=\frac{2c}{4c}=\frac{1}{2}$,所以$|BC|=2|BF_1|=6t$,所以$|AF_2|=\frac{1}{3}|BC|=2t$,
由双曲线定义知$|AF_2|-|AF_1|=2a$,即$2t-t=2a$,$t=2a$,①
又由$|BF_1|-|BF_2|=2a$得$|BF_2|=3t-2a=2t$,所以$|BF_2|=|AB|=|AF_2|=2t$,
即$\triangle ABF_2$是等边三角形,
所以$\angle F_2BC=\angle ABF_2=60°$.
在$\triangle F_1BF_2$中,由余弦定理知
$\cos\angle F_1BF_2=\frac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2\cdot|BF_1|\cdot|BF_2|}$,即$\frac{1}{2}=\frac{4t^2+9t^2-4c^2}{2\times2t\times3t}$,
化简得$7t^2=4c^2$,把①代入上式得$e=\frac{c}{a}=\sqrt{7}$,所以离心率为$\sqrt{7}$.

12. C 【解析】根据题意,$g(x)+h(x)=e^x+x$ ①,则$g(-x)+h(-x)=e^{-x}-x$,
而函数$g(x)$,$h(x)$分别是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数和奇函数,
则$g(-x)+h(-x)=g(x)-h(x)=e^{-x}-x$ ②,

①+②可得:$g(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$,

当 $x>0$ 时,$g'(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})>0$,则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数,

$g(x)$ 为偶函数,其图象关于直线 $x=0$ 对称,则 $g(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数,

对于 $f(x)=e^{|x-1|}+\lambda g(x-1)-2\lambda^2(\lambda>0)$,其图象关于直线 $x=1$ 对称,

当 $x>1$ 时,$f(x)=e^{x-1}+\lambda g(x-1)-2\lambda^2$,$\lambda>0$,则 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数,

若函数 $f(x)=e^{|x-1|}+\lambda g(x-1)-2\lambda^2$ 有唯一零点,

则有 $f(1)=e^0+\lambda g(0)-2\lambda^2=1+\lambda(\frac{1+1}{2})-2\lambda^2=1+\lambda-2\lambda^2=0$,

解得 $\lambda=1$ 或 $-\frac{1}{2}$(舍去).

13. 8 【解析】因为抛物线 $C:y^2=2px$,所以抛物线的焦点 $F(\frac{p}{2},0)$,

因为直线 $y=x-1$ 过抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F,

所以 $0=\frac{p}{2}-1$,解得 $p=2$,所以抛物线方程为 $y^2=4x$,

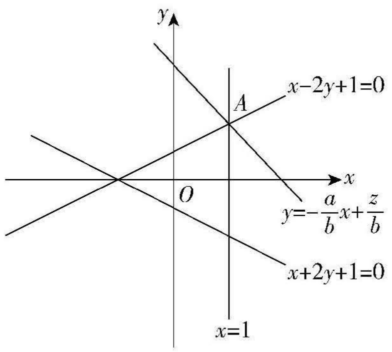
设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

联立直线与抛物线方程 $\begin{cases}y^2=4x,\\y=x-1,\end{cases}$ 化简整理可得,$x^2-6x+1=0$,

$\Delta>0$,由韦达定理可得,$x_1+x_2=6$,

$|AB|=x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}=x_1+x_2+p=6+2=8$.

14. $\frac{9}{4}$ 【解析】由约束条件可得可行域如下图阴影部分所示:



当 $z=ax+by(a>b>0)$ 时,直线 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$ 在 y 轴截距最大,

因为 $a>b>0$,所以 $-\frac{a}{b}<-1$,则由图形可知:当 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$ 过 A 时,在 y 轴上的截距最大,

由 $\begin{cases}x-2y+1=0,\\x=1,\end{cases}$ 得:$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$ 即 $A(1,1)$,所以 $z_{\max}=a+b=4$,

所以 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}(\frac{4}{a}+\frac{1}{b})(a+b)=\frac{1}{4}(5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b})\geqslant\frac{1}{4}(5+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}})=\frac{9}{4}$(当且仅当 $\frac{4b}{a}=\frac{a}{b}$,即 $a=2b=\frac{8}{3}$ 时取等号),所以 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$.

15. 1 或$\frac{1}{2}$ 【解析】由题意，得 $AP\perp$平面 ABD，$AD\perp BD$，

又因为 $BD\subset$平面 ABD，所以 $AP\perp BD$，又 $AD\cap AP=A$，AD，$AP\subset$平面 PAD，

所以 $BD\perp$平面 PAD，又 $PD\subset$平面 PAD，所以 $BD\perp PD$，

设 $PD=x$ km，记$\angle PBD=\alpha$，$\angle PCD=\beta$，

所以 $\tan\alpha=\frac{x}{2}$，$\tan\beta=x$，所以 $\tan\angle BPC=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{x-\frac{x}{2}}{1+x\cdot\frac{x}{2}}=\frac{x}{x^2+2}=\frac{1}{3}$，

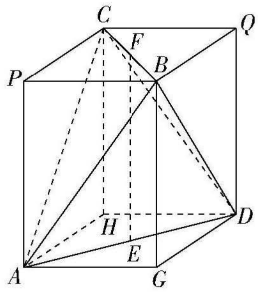
解得 $x=1$ 或 $x=2$，即 $PD=2$ km 或 $PD=1$ km，

又无人机对地面受灾 D 点的俯角为 30°.

当 $PD=2$ km 时，$PA=PD\sin 30^\circ=1$ km.

当 $PD=1$ km 时，$PA=PD\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$km. 故答案为 1 或$\frac{1}{2}$.

16. 1 【解析】由题知四面体中互为异面直线的两条棱长分别相等，故可将此四面体放入长方体中，如图所示：不妨设该长方体长、宽、高分别为 a,b,c，



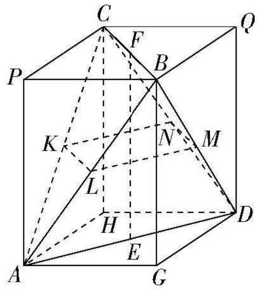
则有 $a^2+b^2=AD^2=4$①，$b^2+c^2=AC^2=8$②，

$a^2+c^2=AB^2=8$③，联立①②③可得：

$a=b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{6}$，

设平面 α 与四面体的各面分别交于 KL，LM，MN，KN，

如图所示：



因为 $EF\perp$平面 α，

由长方体性质可知 $EF\perp$平面 $AGDH$，

故平面 α∥平面 $AGDH$∥平面 $PBQC$，

因为平面 $ABC\cap$平面 $PBQC=BC$，平面 $ABC\cap$平面 $\alpha=KL$，

所以 $KL\parallel BC$，所以$\frac{KL}{BC}=\frac{AL}{AB}$，

即$\frac{KL}{AL}=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $KL=\frac{1}{\sqrt{2}}AL$，

因为平面 $ABD\cap$平面 $AGDH=AD$，平面 $ABD\cap$平面 $\alpha=LM$，

所以 $LM\parallel AD$，所以$\frac{LM}{AD}=\frac{BL}{AB}$，即$\frac{LM}{BL}=\frac{AD}{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $LM=\frac{1}{\sqrt{2}}BL$，

同理可得 $MN\parallel BC$，$NK\parallel AD$.

因为 $AL+BL=AB=2\sqrt{2}$，故 $KL+LM=\frac{1}{\sqrt{2}}(AL+BL)=2$，

因为 $a=b=\sqrt{2}$，所以四边形 $AGDH$ 为正方形，所以 $AD\perp GH$，

即 $AD\perp BC$，即 $KL\perp LM$，

因为 $KL\parallel BC$，$LM\parallel AD$，$MN\parallel BC$，$NK\parallel AD$，

所以 $KL\parallel MN$，$LM\parallel NK$，

综上：四边形 $KLMN$ 为矩形，所以 $S=KL\cdot LM\leqslant(\frac{KL+LM}{2})^2=1$，

当且仅当 $KL=LM$ 时成立. 故截面面积的最大值为 1.

17. 解:(1)因为第3、4、5组人数之比为3∶2∶1,……………………………………（2分）

所以第4组选取参加抢答赛的人数为$\frac{2}{6}\times 6=2$人. ……………………（4分）

(2)记其他人为丁、戊、己,则所有选取的结果为(甲、乙)、(甲、丙)、(甲、丁)、(甲、戊)、(甲、己)、(乙、丙)、(乙、丁)、(乙、戊)、(乙、己)、(丙、丁)、(丙、戊)、(丙、己)、(丁、戊)、(丁、己)、(戊、己)共15种情况, ……………………………………（7分）

其中甲、乙、丙这3人至多有一人被选取有12种情况. ……………………（9分）

设“甲、乙、丙3人至多有一人被选取”的事件为A. …………………（10分）

故甲、乙、丙3人至多有一人被选取的概率为$P(A)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$. ……………（12分）

18. 解:若选①:(1)由已知$b_2=T_2-T_1=2,b_3=T_3-T_2=4$,所以$q=\frac{b_3}{b_2}=2$, …………（1分）

通项$b_n=b_2q^{n-2}=2\times 2^{n-2}=2^{n-1}$, ……………………………………（3分）

故$a_1=b_1=1$. ……………………………………………………………（4分）

不妨设$\{a_n\}$的公差为d,则$1+2d+1+4d=14$,解得$d=2$, ……………………（5分）

所以$a_n=2n-1$. ……………………………………………………………（6分）

(2)由$c_n=[\lg a_n]$,则$c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=0$, ……………………………（7分）

$c_6=c_7=\cdots=c_{50}=1$, ……………………………………………………（8分）

$c_{51}=c_{52}=\cdots=c_{100}=2$, ……………………………………………（9分）

所以$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}=1\times 45+2\times 50=145$. ……………………（12分）

若选②:(1)由已知$b_2=T_2-T_1=2,b_3=T_3-T_2=4,q=\frac{b_3}{b_2}=2$, ………………（1分）

通项$b_n=b_2q^{n-2}=2\times 2^{n-2}=2^{n-1}$, ……………………………………（3分）

故$a_1=b_1=1$. ……………………………………………………………（4分）

不妨设$\{a_n\}$的公差为d,则$4\times 1+\frac{4\times 3}{2}\times d=16$,解得$d=2$, ……………（5分）

所以$a_n=2n-1$. ……………………………………………………………（6分）

(2)由$c_n=[\lg a_n]$,则$c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=0$, ……………………………（7分）

$c_6=c_7=\cdots=c_{50}=1$, ……………………………………………………（8分）

$c_{51}=c_{52}=\cdots=c_{100}=2$, ……………………………………………（9分）

所以$c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}=1\times 45+2\times 50=145$. ……………………（12分）

若选③:(1)由已知$b_2=T_2-T_1=2,b_3=T_3-T_2=4$,所以$q=\frac{b_3}{b_2}=2$, ……………（1分）

通项$b_n=b_2q^{n-2}=2\times 2^{n-2}=2^{n-1}$, ……………………………………（3分）

故$a_1=b_1=1$. ……………………………………………………………（4分）

不妨设$\{a_n\}$的公差为d,则$(1+7d)^2=(1+4d)(1+12d)$,因为$d\neq 0$,解得$d=2$, …（5分）

所以$a_n=2n-1$. ……………………………………………………………（6分）

(2)由$c_n=[\lg a_n]$,

则$c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=0$, ……………………………………………（7分）

$c_6=c_7=\cdots=c_{50}=1$, ……………………………………………………（8分）

$c_{51}=c_{52}=\cdots=c_{100}=2$, ………………………………………………………… (9 分)

所以 $c_1+c_2+c_3+\cdots+c_{100}=1\times45+2\times50=145$. …………………………… (12 分)

19. 解:(1)证明:因为 $AD=BD=1, AB=\sqrt{2}$,

所以 $AD^2+BD^2=AB^2$,所以 $BD\perp AD$, ………………………………………… (1 分)

因为四边行 $ABCD$ 为平行四边形,所以 $BC\perp BD$, …………………………………… (2 分)

又因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $PD\perp BC$, ……………………………………… (3 分)

而 $BD\cap PD=D$,且 $BD,PD\subset$ 平面 PBD,

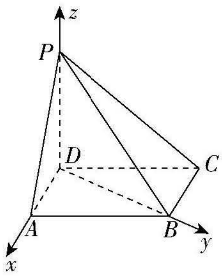
所以 $BC\perp$ 平面 PBD, ……………………………………………………………… (4 分)

又 $BC\subset$ 平面 PBC,

所以平面 $PBC\perp$ 平面 PBD. ……………………………………………………… (5 分)

(2)由(1)知,$BD\perp AD$,且 $PD\perp$ 平面 $ABCD$, ……………………………………… (6 分)

故以 D 为原点,DA,DB,DP 分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示空间直角坐标系,



则 $D(0,0,0),A(1,0,0),B(0,1,0),C(-1,1,0),P(0,0,1)$,

假设在 PC 存在一点 $M(x,y,z)$ 满足条件,

设 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,

所以 $(x,y,z-1)=\lambda(-1,1,-1)$,所以 $\begin{cases}x=-\lambda,\\y=\lambda,\\z=1-\lambda,\end{cases}$ 即 $M(-\lambda,\lambda,1-\lambda)$,

所以 $\overrightarrow{BD}=(0,-1,0),\overrightarrow{DM}=(-\lambda,\lambda,1-\lambda)$, ……………………………… (7 分)

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 MBD 的法向量,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(x_1,y_1,z_1)(0,-1,0)=0,\\(x_1,y_1,z_1)(-\lambda,\lambda,1-\lambda)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y_1=0,\\-\lambda x_1+\lambda y_1+(1-\lambda)z_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1-\lambda$,可得 $\boldsymbol{n}_1=(1-\lambda,0,\lambda)$, …………………………………… (8 分)

因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,

不妨令平面 CBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$, ………………………………… (9 分)

由二面角 $M-BD-C$ 的大小为 $60°$,

所以 $\cos 60°=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{2\lambda^2-2\lambda+1}}=\dfrac{1}{2}$, ……………………………… (10 分)

$\lambda=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ 或 $\lambda=\dfrac{-\sqrt{3}-1}{2}<0$(舍去), ……………………………………… (11 分)

所以存在实数 $\lambda=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,即 $\dfrac{PM}{PC}=\dfrac{PM}{PM+MC}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$,

解得 $\dfrac{PM}{MC}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,使得二面角 $M-BD-C$ 的大小为 $60°$. ……………………… (12 分)

20. 解：(1)由椭圆的定义可知：M 的轨迹为以 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$为焦点的椭圆，…… (1分)

且 $2a=2\sqrt{2}$，$c=1$，…… (2分)

所以 $b^2=a^2-c^2=2-1=1$，…… (3分)

所以 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …… (4分)

(2)设直线 l 为：$y=k(x+1)$，$k\neq 0$，…… (5分)

则联立$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 得：$(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=-\frac{4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{1+2k^2}$，…… (6分)

$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2k=\frac{2k}{1+2k^2}$，…… (7分)

则$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(-\frac{4k^2}{1+2k^2})^2-\frac{4(2k^2-2)}{1+2k^2}}=\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2}$， …… (8分)

AB 的中点坐标为$(-\frac{2k^2}{1+2k^2},\frac{k}{1+2k^2})$，

所以 AB 的垂直平分线为 $y-\frac{k}{1+2k^2}=-\frac{1}{k}(x+\frac{2k^2}{1+2k^2})$， …… (9分)

令 $y=0$ 得 $x=-\frac{k^2}{1+2k^2}$，所以 $P(-\frac{k^2}{1+2k^2},0)$， …… (10分)

$|F_1P|=1-\frac{k^2}{1+2k^2}=\frac{1+k^2}{1+2k^2}$，…… (11分)

所以$\frac{|AB|}{|F_1P|}=\frac{\frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{1+2k^2}}{\frac{1+k^2}{1+2k^2}}=2\sqrt{2}$. …… (12分)

21. 解：(1)$a=\frac{1}{2}$时，$f(x)=xe^x-\frac{1}{2}e^{2x}$，$f'(x)=(x+1)e^x-e^{2x}=e^x(x+1-e^x)$， …… (1分)

令 $F(x)=x+1-e^x$，则 $F'(x)=1-e^x$，

当 $x\in(-\infty,0)$，$F'(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$，$F'(x)<0$，

所以 $F(x)$在$(-\infty,0)$上递增，在$(0,+\infty)$上递减，

所以 $F(x)\leqslant F(0)=0$，所以 $f'(x)\leqslant 0$， …… (3分)

所以 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上递减. …… (4分)

(2)$f'(x)=(x+1)e^x-2ae^{2x}=e^x[(x+1)-2ae^x]$， …… (5分)

由$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant\frac{2}{a}$，所以 $f(0)=-a\geqslant\frac{2}{a}$可得 $a<0$，…… (6分)

令 $g(x)=(x+1)-2ae^x(a<0)$，则 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上递增，

由 $g(-1)=-2ae^{-1}>0$，且当 $x<0$ 时，$g(x)<x+1-2a$，

所以 $g(2a-1)<2a-1+1-2a=0$，

所以 $\exists x_0\in(2a-1,-1)$使得 $g(x_0)=0$，

且当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时 $g(x)<0$ 即 $f'(x)<0$；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时 $g(x)>0$ 即 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0e^{x_0}-ae^{2x_0}$， ………………………………………… (8 分)

由 $g(x_0)=(x_0+1)-2ae^{x_0}=0$，所以 $a=\dfrac{x_0+1}{2e^{x_0}}$，

由 $f(x)_{\min}\geqslant\dfrac{2}{a}$，得 $x_0e^{x_0}-e^{2x_0}\cdot\dfrac{x_0+1}{2e^{x_0}}\geqslant\dfrac{4e^{x_0}}{x_0+1}$ 即 $\dfrac{x_0-1}{2}\geqslant\dfrac{4}{x_0+1}$，

由 $x_0+1<0$ 得 $x_0^2-1\leqslant8$，

所以 $-3\leqslant x_0<-1$. ………………………………………………………… (10 分)

设 $h(x)=\dfrac{x+1}{2e^x}(-3\leqslant x<-1)$，则 $h'(x)=-\dfrac{x}{2e^x}>0$，

可知 $h(x)$ 在 $[-3,-1)$ 上递增，

所以 $h(-3)\leqslant h(x)<h(-1)$，

所以 $h(x)\in[-e^3,0)$，

所以 $a=h(x_0)\in[-e^3,0)$，

综上 $a\in[-e^3,0)$. ………………………………………………………… (12 分)

22. 解：(1)曲线 C_1 的普通方程为 $\cos\alpha\cdot y-\sin\alpha\cdot x=0$，

即极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$. ……………………………………………… (3 分)

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=3$，

即 $(x-1)^2+y^2=4$. ………………………………………………………… (5 分)

(2)曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-2\cos\theta\cdot\rho-3=0$，代入 $\theta=\alpha$，……………………… (7 分)

可得 $\rho_1\cdot\rho_2=-3$，………………………………………………………… (9 分)

则 $|OA|\cdot|OB|=|\rho_1\rho_2|=3$. ……………………………………………… (10 分)

23. 解：(1)因为 $f(x)=2|x-1|-x$ 且 $f(x)<2x-4$，

即 $2|x-1|<3x-4$，

即 $-(3x-4)<2(x-1)<3x-4$， ………………………………………………… (3 分)

解得：$x>2$，

故不等式 $f(x)<2x-4$ 的解集为 $(2,+\infty)$. ……………………………………… (5 分)

(2)证明：$f(x)=\begin{cases}x-2,x\geqslant1,\\-3x+2,x<1,\end{cases}$

则 $m=f(1)=1-2=-1$，………………………………………………………… (7 分)

则 $(a+b)+(b+c)=1$，$\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}=(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c})[(a+b)+(b+c)]=2+\dfrac{b+c}{a+b}+\dfrac{a+b}{b+c}\geqslant4$，

即 $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}\geqslant4$. ………………………………………………………… (9 分)

当且仅当 $\dfrac{b+c}{a+b}=\dfrac{a+b}{b+c}$ 时，取等号. ……………………………………………… (10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。