2020~2021 学年度第二学期期末考试

高二数学参考答案及评分标准

2021．7

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1～4：DABC　　　5～8：DCBC

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9．BD　　　10．AD　　　11．ACD　　　12．ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13． 21　　　14． 5　　　15． 5　　　16．$[\frac{1}{e^2}，+\infty)$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（1）$n=6$． ……………………………………………………………… 3 分

（2）展开式的通项 $T_{k+1}=C_6^k(-\frac{1}{\sqrt{x}})^k(2x)^{6-k}=C_6^k(-1)^k\cdot 2^{6-k}x^{6-\frac{3}{2}k}$． ……………… 5 分

由 $6-\frac{3}{2}k=0$，得 $k=4$． ………………………………………………… 6 分

故展开式中的常数项为 $T_5=C_6^4(-1)^4\cdot 2^{6-4}=60$． …………………………… 7 分

（3）由题意，$A=C_6^0+C_6^1+\cdots+C_6^6=2^6=64$． …………………………… 8 分

在 $(2x-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 中，令 $x=1$，得 $B=1$． ……………………………………… 9 分

所以 $A+B=65$． ……………………………………………………………10 分

18．解：（1）$a_2=a_1+1=2$，$a_3=a_2=2$，$a_4=a_3+1=3$． ………………………… 3 分

当 $k\in\mathbf{N}^*$ 时，由题意，得 $a_{2k}=a_{2k-1}+1$，$a_{2k+1}=a_{2k}$．

于是 $a_{2k+1}=a_{2k-1}+1$，即 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=1$． ………………………………… 5 分

所以，$\{a_{2k-1}\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，

所以 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\cdot 1=k$，即 n 为奇数时，$a_n=\frac{n+1}{2}$． ……………… 6 分

当 n 为偶数时，$a_n = a_{n-1} + 1 = \frac{(n-1)+1}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$． ………………………… 7 分

所以，$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, n为奇数, \\ \frac{n+2}{2}，n为偶数. \end{cases}$ ………………………………………………… 8 分

备注： $a_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}[3+(-1)^n]$，同样给分．求 a_n 没有过程的，结果正确给 2 分．

（2）**法 1：** $S_{100} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{99}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{100})$ ……………………………… 9 分

$= (1+2+3+\cdots+50) + (2+3+4+\cdots+51)$

$= \frac{(1+50)\times 50}{2} + \frac{(2+51)\times 50}{2}$ ………………………………………………11 分

$= 2\,600$． ………………………………………………………………………12 分

法 2： 由（1），当 $k \in \mathbf{N}^*$ 时，$a_{2k-1} = k$，$a_{2k} = k+1$．

令 $b_k = a_{2k-1} + a_{2k}$，则 $b_k = 2k+1$． ……………………………………………… 9 分

$S_{100} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{99} + a_{100}) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{50}$ ……………10 分

$= \frac{b_1 + b_{50}}{2} \times 50 = \frac{3+101}{2} \times 50 = 2\,600$． ……………………………………12 分

19．（1）解：设 $B =$ “任取一个零件为次品”．

由题意，$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$，且 A_1，A_2，A_3 两两互斥．由全概率公式，得

$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$ …………………… 2 分

$= 0.25\times 0.04 + 0.35\times 0.06 + 0.4\times 0.06$ ………………………………………… 4 分

$= 0.055$． ……………………………………………………………………………… 6 分

（2）$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$ ………………………………………… 7 分

$= \frac{0.25\times 0.04}{0.055} = \frac{2}{11}$． ……………………………………………… 9 分

$P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}$ ………………………………………10 分

$= \frac{0.35\times 0.06}{0.055} = \frac{21}{55}$． ……………………………………………12 分

20．解：（1） $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$． ………………………………………………… 1 分

$f'(x)=2x+\dfrac{2k}{x}=\dfrac{2(x^2+k)}{x}$． ………………………………………………… 2 分

当 $k\geqslant 0$ 时， $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增． ……………………………… 3 分

当 $k<0$ 时，由 $f'(x)=0$ ，得 $x=\sqrt{-k}$ ．

若 $x\in(0,\sqrt{-k})$ ，则 $f'(x)<0$ ， $f(x)$ 单调递减；

若 $x\in(\sqrt{-k},+\infty)$ ，则 $f'(x)>0$ ， $f(x)$ 单调递增． ………………………………… 5 分

综上，当 $k\geqslant 0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $k<0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-k})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{-k},+\infty)$ 上单调递增． ………………………………………………… 6 分

（2）由（1），当 $k\geqslant 0$ 时， $f(x)$ 在 $[1，\mathrm{e}]$ 上单调递增， $f(x)_{\min}=f(1)=1$． ……… 8 分

当 $k<0$ 时， $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{-k})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{-k},+\infty)$ 上单调递增.

① 若 $\mathrm{e}\leqslant\sqrt{-k}$ ，即 $k\leqslant-\mathrm{e}^2$， $f(x)$ 在 $[1，\mathrm{e}]$ 上单调递减，

$f(x)_{\min}=f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^2+2k$ ． ………………………………………………………… 9 分

② 若 $1<\sqrt{-k}<\mathrm{e}$ ，即 $-\mathrm{e}^2<k<-1$ ， $f(x)$ 在 $[1,\sqrt{-k})$ 上单调递减，在 $(\sqrt{-k}，\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$f(x)_{\min}=f(\sqrt{-k})=-k+k\ln(-k)$ ． ………………………………………………10 分

③ 若 $\sqrt{-k}\leqslant 1$ ，即 $-1\leqslant k<0$ 时， $f(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}]$ 上单调递增.

$f(x)_{\min}=f(1)=1$ ． ………………………………………………………………11 分

综上， $k\leqslant-\mathrm{e}^2$ 时， $f(x)_{\min}=\mathrm{e}^2+2k$ ； $-\mathrm{e}^2<k<-1$ 时， $f(x)_{\min}=-k+k\ln(-k)$ ；

$k\geqslant-1$ 时， $f(x)_{\min}=1$． ………………………………………………………………12 分

21．（本题满分 12 分）

解：（1）家长所打分数的平均值为

$\bar{x}=\dfrac{1}{100}\times(5\times5+6\times15+7\times20+8\times25+9\times20+10\times15)=7.85$． ………………………… 3 分

注：列式 1 分，结果 2 分.

（2）列联表如下：

性别 X	自制力 Y		合计
	不小于 8 分	小于 8 分	
男	20	30	50
女	**40**	**10**	50
合计	**60**	**40**	100

…………………………………………………………………………………………… 5 分

零假设为 H_0：分类变量 X 与 Y 相互独立，即性别与自制力的强弱之间无关联.

根据列联表中的数据，得

$\chi^2=\dfrac{100\times(20\times10-30\times40)^2}{60\times40\times50\times50}=\dfrac{50}{3}>10.828=x_{0.001}$． …………………………………… 7 分

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为性别与自制力的强弱之间有关联，该推断犯错误的概率不超过 0.001． …………………………………… 8 分

男生中“自制力强”和“自制力一般”的频率分别为 $\dfrac{20}{50}=0.4$ 和 $\dfrac{30}{50}=0.6$；

女生中“自制力强”和“自制力一般”的频率分别为 $\dfrac{40}{50}=0.8$ 和 $\dfrac{10}{50}=0.2$．

……………………………………………………………………………………………10 分

由 $\dfrac{0.8}{0.4}=2$，$\dfrac{0.6}{0.2}=3$，可见，女生“自制力强”的频率是男生的 2 倍，男生“自制力一般”的频率是女生的 3 倍．于是，根据频率稳定于概率的原理，可以认为女生自制力强的概率明显大于男生自制力强的概率，即女生自制力更强. ……………………………12 分

注：两组数据 $\dfrac{0.8}{0.4}=2$，$\dfrac{0.6}{0.2}=3$ 中拿一组说事，不扣分.

22．解：（1）当 $a=0$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{2}x^2-1$，$f'(x)=\mathrm{e}^x-x$，

所以 $f'(0)=1$，$f(0)=0$．

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-0=1\times(x-0)$，即 $y=x$．……2 分

（2）$f'(x)=\mathrm{e}^x+a\cos x-x$，$f''(x)=\mathrm{e}^x-a\sin x-1$．

① 当 $a\leqslant 0$ 时，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $\sin x>0$，$-a\sin x\geqslant 0$，$\mathrm{e}^x>1$．

因此 $f''(x)=(\mathrm{e}^x-1)-a\sin x>0$，$f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增．………………3 分

（i）当 $a<-1$ 时，$f'(0)=1+a<0$, $f'(\pi)=\mathrm{e}^{\pi}-a-\pi>\mathrm{e}^2-\pi>4-\pi>0$．

所以存在唯一的 $x_0\in(0,\pi)$，使得 $f'(x_0)=0$．

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<f'(x_0)=0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)>f'(x_0)=0$，$f(x)$ 在 (x_0,π) 上单调递增．

所以 x_0 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内唯一的极值点．………………………………………5 分

（ii）当 $-1\leqslant a\leqslant 0$ 时，因为 $x\in(0,\pi)$，所以 $f'(x)>f'(0)=1+a\geqslant 0$，

$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递增，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内没有极值点．……………………6 分

② 当 $0<a\leqslant 2$ 时，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ 时，由 $\mathrm{e}^x-x>1$，$a\cos x\geqslant 0$，得 $f'(x)>0$．……………………7 分

当 $x\in[\frac{\pi}{2}$，$\pi)$ 时，

因为 $y=\mathrm{e}^x-x$ 在 $[\frac{\pi}{2}$，$\pi)$ 上单调递增，所以 $\mathrm{e}^x-x\geqslant\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}$．

又 $a\cos x\geqslant 2\cos x>-2$，

所以 $f'(x)>\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}-2>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-\frac{3.2}{2}-2=\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-3.6$．………………………………9 分

$\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-3.6>0\Leftrightarrow\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}>3.6\Leftrightarrow\mathrm{e}^3>3.6^2$，

因为 $\mathrm{e}^3>2.5^3=15.625>3.6^2=12.96$，所以 $f'(x)>\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}-3.6>0$．…………10 分

可见，$x\in(0,\pi)$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(0,\pi)$上单调递增，

所以$f(x)$在$(0,\pi)$内无极值点．……………………………………………………11 分

综上，当$a<-1$时，$f(x)$在$(0,\pi)$内极值点的个数为1；当$-1\leqslant a\leqslant 2$时，$f(x)$在$(0,\pi)$内极值点的个数为0．……………………………………………………………………12 分