2021—2022 学年高三二轮复习验收考试
数学(文)参考答案

1.【答案】A

【解析】$(2-i)(4+5i)=8+10i-4i+5=13+6i$,故$(2-i)(4+5i)$在复平面内对应的点为$(13,6)$,位于第一象限,故选 A.

2.【答案】C

【解析】依题意,$A=\{x|\frac{x-3}{x+2}<0\}=\{x|-2<x<3\}$,则$A\cup B=\{x|x>-2\}$,故选 C.

3.【答案】C

【解析】依题意,所求中位数为$80+\frac{0.5-0.4}{0.04}=82.5$,故选 C.

4.【答案】B

【解析】令$x=0$,可知$e^{2x}<e^{x}+1$成立,即p为真命题;若l_1与l_2相互垂直,则$2-a^2=0$,解得$a=\pm\sqrt{2}$,故q为假命题,则$p\wedge\neg q$为真命题,故选 B.

5.【答案】B

【解析】该三棱锥的四个面的面积分别为$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1$,$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$,$\frac{1}{2}\times2\times2=2$,$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}=\sqrt{3}$,故最大值为 2,故选 B.

6.【答案】D

【解析】依题意,设$M(x_0,y_0)$,则$x_0=2-\frac{p}{2}$,$|OM|^2=x_0^2+y_0^2=\left(2-\frac{p}{2}\right)^2+2p\left(2-\frac{p}{2}\right)=5$,解得$p=2$或$p=\frac{2}{3}$,故选 D.

7.【答案】C

【解析】在 1 到 50 的自然数中,三角形数有 1,3,6,10,15,21,28,36,45,正方形数有 1,4,9,16,25,36,49,故所求概率$P=1-\frac{14}{50}=\frac{18}{25}$,故选 C.

8.【答案】B

【解析】由图可知,$\frac{T}{2}=1$,解得$T=2$,故$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$,则$f(x)=\cos(\pi x-\varphi)$;而$f\left(\frac{5}{6}\right)=1$,故$\frac{5\pi}{6}-\varphi=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得$\varphi=\frac{5\pi}{6}-2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又$|\varphi|<\pi$,得$\varphi=\frac{5\pi}{6}$,故选 B.

9.【答案】B

【解析】因为$\begin{cases}\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=2\sqrt{6},\\ \sin^2A+\cos^2A=1,\end{cases}$解得$\cos A=\frac{1}{5}$,由正弦定理,$\sin B:\sin C=AC:AB=5:6$,设

$AC=5k$,$AB=6k$,由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\cdot AB\cdot\cos A=49k^2$,则 $BC=7k$,故$\frac{BC}{AB}=\frac{7k}{6k}$ $=\frac{7}{6}$,故选 B.

10.【答案】D

【解析】依题意,$\begin{cases}a+3=(a+3)^2-2,\\a<0\leqslant a+3,\end{cases}$解得 $a=-1$,故 $g(x)=-x^2+x$,可知 $g(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$上单调递增,故选 D.

11.【答案】B

【解析】依题意$\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=4\sqrt{3}$,解得 $AB=4$,延长 AC 至 M,使得$\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}$;因为$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+(2-2x)\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AM}$,所以点 D 在直线 BM 上,取线段 AC 的中点 O,连接 OD,则$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{DO}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{DO}^2-\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{DO}^2-4$,显然当 $OD\perp BM$ 时,$|\overrightarrow{DO}|$有最小值 3,所以$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DO}^2-4\geqslant5$,故$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}$的最小值为 5,故选 B.

12.【答案】B

【解析】由题意,圆心 $F'(c,0)$为 C 的右焦点,$|OF|=|OP|=|OF'|=c$,不妨设点 P 在第一象限,则$\angle PFF'=\frac{\pi}{6}$,所以直线 PF 的斜率 $k=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,从而 $-\frac{b}{a}=-\sqrt{3}$,$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,故 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$,故选 B.

13.【答案】$[-1,4]$

【解析】$6x+5y=2x-y+2(2x+3y)$,故 $6x+5y$ 的取值范围为$[-1,4]$.

14.【答案】$4x-y-1=0$

【解析】当 $x=0$ 时,$y=-1$,而 $y=x^3-(2x-1)^2=x^3-4x^2+4x-1$,$y'=3x^2-8x+4$,故 $y'|_{x=0}=4$,故所求切线方程为 $y+1=4x$,即 $4x-y-1=0$.

15.【答案】45π

【解析】设四面体 $ABCD$ 的外接球的半径为 R,将四面体 $ABCD$ 置于长宽高分别为 a,b,c 的长方体中,故$\begin{cases}a^2+b^2=20,\\b^2+c^2=29,\\a^2+c^2=41,\end{cases}$故 $R=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}=\frac{\sqrt{45}}{2}$,故四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=45\pi$.

16.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

【解析】依题意,$AB=2$,设$\angle OMA=\alpha\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{7\pi}{12}\right)$,则$\angle ONA=\frac{5\pi}{6}-\alpha$,过点 O 分别作 AC,AB 的垂线,垂足分别为 D,G,则 $OD=OG=1$,在$\triangle OND$ 与$\triangle OMG$ 中,易得$\frac{1}{OM^2}=\sin^2\alpha$,$\frac{1}{ON^2}=$

$\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$，则$\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}=\sin^2\alpha+\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+1$，当

$2\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即$\alpha=\frac{5\pi}{12}$时，$\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}$取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}+1$.

17. 解：(1)令 $m=n=1$，得 $a_2=a_1^2$，

又 $S_2=a_1+a_2=12$，

解得 $a_1=3$（负值舍去），$a_2=9$.（2 分）

令 $m=1$，得 $a_{n+1}=a_1a_n$，

所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，

所以$\{a_n\}$是以 3 为首项，3 为公比的等比数列，（5 分）

所以 $a_n=3^n$.（6 分）

(2)由(1)可得，$b_n=na_n=n\cdot 3^n$，

所以 $T_n=1\times3+2\times3^2+3\times3^3+\cdots+n\cdot3^n$，

所以 $3T_n=1\times3^2+2\times3^3+3\times3^4+\cdots+n\cdot3^{n+1}$，（7 分）

两式相减得，$-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}$

$=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}=\frac{(1-2n)3^{n+1}-3}{2}$，（10 分）

所以 $T_n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$.（12 分）

18. 解：(1)依题意，需求量是 25 箱的抽取 3 天，记为 1，2，3，需求量是 26 箱的抽取 2 天，记为 a，b.（1 分）

则随机抽取 2 天，所有的情况为(1，2)，(1，3)，(1，a)，(1，b)，(2，3)，(2，a)，(2，b)，(3，a)，(3，b)，(a，b)，共 10 种.（3 分）

满足条件的有(1，a)，(1，b)，(2，a)，(2，b)，(3，a)，(3，b)，共 6 种，（4 分）

故所求概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.（6 分）

(2)若 $x=24,25,26$，则利润 $X=24\times50=1200$；（7 分）

若 $x=23$，则 $X=23\times50+1\times(-30)=1120$；（8 分）

若 $x=22$，则 $X=22\times50+2\times(-30)=1040$.（9 分）

故这 100 天卖出 A 类水果所获得的日平均利润为$\frac{1200\times60+1120\times20+1040\times20}{100}=1152$ 元.（12 分）

19. 证明：(1)不妨设 $BD=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2}$，（1 分）

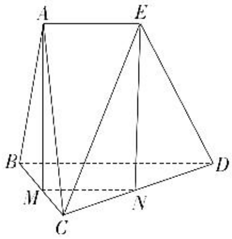
因为$\triangle ABC$，$\triangle ECD$ 是全等的正三角形，所以 $CD=BC$，（2 分）

所以 $BD^2=BC^2+DC^2$，故 $BC\perp DC$，（3 分）

因为平面 $ECD\perp$平面 BCD，平面 $ECD\cap$平面 $BCD=CD$，所以 $BC\perp$平面 ECD，（4 分）

因为 $BC\subset$平面 ABC，故平面 $ABC\perp$平面 ECD.（5 分）

(2)分别取 BC，DC 的中点 M，N，连接 AM，EN，MN，（6 分）



因为$\triangle ABC$是等边三角形,所以$AM\perp BC$,$AM=\frac{\sqrt{3}}{2}BC$,(7 分)

因为平面$ABC\perp$平面BCD,$AM\subset$平面ABC,平面$ABC\cap$平面$BCD=BC$,

所以$AM\perp$平面BCD,同理$EN\perp$平面BCD,$EN=\frac{\sqrt{3}}{2}DC$,(8 分)

所以$AM/\!/EN$,(9 分)

又$BC=DC$,所以$AM=EN$,(10 分)

所以四边形$AMNE$是平行四边形,(11 分)

所以$AE\underline{/\!/}MN$,又$MN\underline{/\!/}\frac{1}{2}BD$,所以$AE/\!/BD$,

且$AE<BD$,即四边形$AEDB$为梯形.(12 分)

20. 解:(1)依题意,$f(x)=e^x-x$,$f'(x)=e^x-1$,(1 分)

令$f'(x)=0$,解得$x=0$.(2 分)

故当$x\in(-\infty,0)$时,$f'(x)<0$,当$x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,(3 分)

故$f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$,单调递增区间为$(0,+\infty)$.(4 分)

(2)依题意,$e^x-ax^2-x\geqslant 1$,即$e^x-ax^2-x-1\geqslant 0$,

设$g(x)=e^x-ax^2-x-1(x\geqslant 0)$,则$g(x)_{\min}\geqslant 0$,且$g(0)=0$,(5 分)

则$g'(x)=e^x-2ax-1(x\geqslant 0)$,且$g'(0)=0$,

令$h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=e^x-2a$,(6 分)

当$a\leqslant\frac{1}{2}$时,则当$x\geqslant 0$时,$h'(x)\geqslant h'(0)\geqslant 0$,则$g'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,

故$g'(x)\geqslant g'(0)=0$,则$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,

故$g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意;(9 分)

当$a>\frac{1}{2}$时,令$h'(x)=0$,得$x=\ln 2a$,

所以当$x\in[0,\ln 2a)$,$h'(x)<0$,$h(x)$在$[0,\ln 2a)$上单调递减;

从而$x\in[0,\ln 2a)$时,$g'(x)\leqslant g'(0)=0$,

故当$x\in[0,\ln 2a)$时,$g(x)$在$[0,\ln 2a)$上单调递减,$g(x)\leqslant g(0)=0$,不符合题意.

综上所述,a的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.(12 分)

21. 解：(1)依题意，$\begin{cases}|MF|=\sqrt{b^2+c^2}=a=2,\\ -\dfrac{b}{c}=\tan\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\end{cases}$ (1 分)

解得 $b=1, c=\sqrt{3}$，(3 分)

故 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.（4 分）

(2) l 经过定点 $(-1,-1)$，证明如下：

由(1)可知 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.（5 分）

①当 l 的斜率存在时，设 $l: y=kx+t(t\neq\pm1)$，

由 $\begin{cases}y=kx+t\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(1+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-4=0$（7 分）

则 $\Delta=(8kt)^2-4(1+4k^2)(4t^2-4)>0$，

由题知 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{-8kt}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4t^2-4}{1+4k^2}$，(8 分)

则 $k_{MP}+k_{MQ}=\dfrac{y_1-1}{x_1}+\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{2kx_1x_2+(t-1)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{8k(t-1)}{4(t+1)(t-1)}=2$，

解得 $t=k-1$，(9 分)

所以 l 的方程为 $y=kx+k-1$，即 $y=k(x+1)-1$，

所以 l 经过定点 $(-1,-1)$.（11 分）

②当 l 的斜率不存在时，设 $l: x=m(m\neq0)$，设 $P(m,y_P)$，$Q(m,-y_P)$，

则 $k_{MP}+k_{MQ}=\dfrac{y_P-1}{m}+\dfrac{-y_P-1}{m}=2$，解得 $m=-1$，

此时 l 也经过定点 $(-1,-1)$.

综上所述，l 经过定点 $(-1,-1)$.（12 分）

22. 解：(1)因为 l 过原点，且 α 为 l 的倾斜角，故 l 的极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$；(2 分)

因为 $\rho^2=2\rho\cos\theta+3$，由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

得 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x-3=0$，即 $(x-1)^2+y^2=4$.（5 分）

(2)因为 $A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 对应的极坐标为 $\left(1,\dfrac{\pi}{3}\right)$，(6 分)

所以 l 的极坐标方程为 $\theta=\dfrac{\pi}{3}(\rho\in\mathbf{R})$，(7 分)

代入 $\rho^2=2\rho\cos\theta+3$，得 $\rho^2-\rho-3=0$，

设 $M\left(\rho_1,\dfrac{\pi}{3}\right)$，$N\left(\rho_2,\dfrac{\pi}{3}\right)$，

所以 $|OM|\cdot|ON|=|\rho_1||\rho_2|=|\rho_1\rho_2|=3$.（10 分）

23. 解：(1) 依题意，$f(x)=|x-3|+|x+5|=\begin{cases}-2x-2, x<-5,\\ 8,\ -5\leqslant x\leqslant 3,\\ 2x+2, x>3,\end{cases}$ (2 分)

故 $f(x)>10 \Leftrightarrow \begin{cases}-2x-2>10,\\ x<-5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}8>10,\\ -5\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2x+2>10,\\ x>3,\end{cases}$ (3 分)

解得 $x<-6$ 或 $\varnothing$ 或 $x>4$，(4 分)

故不等式 $f(x)>10$ 的解集为 $\{x|x<-6$ 或 $x>4\}$. (5 分)

(2) 依题意，$f(x)=|x-3|+|x+5|\geqslant 8=m$，则 $a+b+c=2$. (6 分)

下面证明：$2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}\leqslant\sqrt{m}$，(7 分)

$\because a+b+c=2$，且 a,b,c 均为正数，

$\therefore 2=a+b+c=\left(\dfrac{a}{2}+b\right)+\left(\dfrac{a}{2}+c\right)\geqslant 2\sqrt{\dfrac{ab}{2}}+2\sqrt{\dfrac{ac}{2}}$，

$\therefore 2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}\leqslant 2\sqrt{2}$，

当且仅当 $a=1, b=c=\dfrac{1}{2}$ 时等号成立，(9 分)

即 $2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}\leqslant\sqrt{m}$. (10 分)