

数学（理科）参考答案及评分意见

评分说明：

1. 本解法给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解答与本解法不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制订相应的评分细则；
2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后续部分的解答未改变试题的内容及难度可视影响的程度决定后续部分的给分，但不得超过该部分的正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分；
3. 解答右侧所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数；
4. 只给整数分数，选择题不给中间分。

一、选择题

1-5.CBCAC 6-10.CACDB 11-12.CD

二、填空题

13.240 14. $a_n = \begin{cases} 1, (n=1) \\ 2^{n-2}, (n \geq 2) \end{cases}$ 15. $2\sqrt{6}$ 16. $\left[1, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

三、解答题

17. 解：（1）该中学高三年级学生每天课外阅读时间的平均数为

$$\bar{x} = 10 \times 0.1 + 30 \times 0.3 + 50 \times 0.4 + 70 \times 0.1 + 90 \times 0.1 = 46 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

该中学高三年级学生每天课外阅读时间的中位数为 $x_1 = 45 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

（2）从课外阅读平均时长在 $(0, 20]$, $(20, 40]$, $(40, 60]$ 的学生中各随机选取一名学生的语文成绩

为优秀的概率分别为 $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\therefore X$ 的可能取值为 0, 1, 2, 3

$$\therefore P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{15}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{7}{20}$$

$$P(X=2) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{29}{60}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{10} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以, X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{29}{60}$	$\frac{1}{10}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{15} + 1 \times \frac{7}{20} + 2 \times \frac{29}{60} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{97}{60} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 证明: $\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且直线 PD 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{4}$

$$\therefore PA \perp AD, PA \perp BD, \angle PDA = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } PA = 2, \therefore AD = 2$$

$$\because \text{底面 } ABCD \text{ 为矩形, 且 } AB = 2$$

$$\therefore \text{底面 } ABCD \text{ 为正方形 } \therefore AC \perp BD$$

$$\text{而 } AC \cap PA = A \therefore BD \perp \text{平面 } PAC \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{又 } BD \subset \text{平面 } PBD \therefore \text{平面 } PBD \perp \text{平面 } PAC \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 建立如图所示的空间直角坐标系, 则

$$A(0,0,0), B(0,2,0), C(2,2,0), D(2,0,0), P(0,0,2)$$

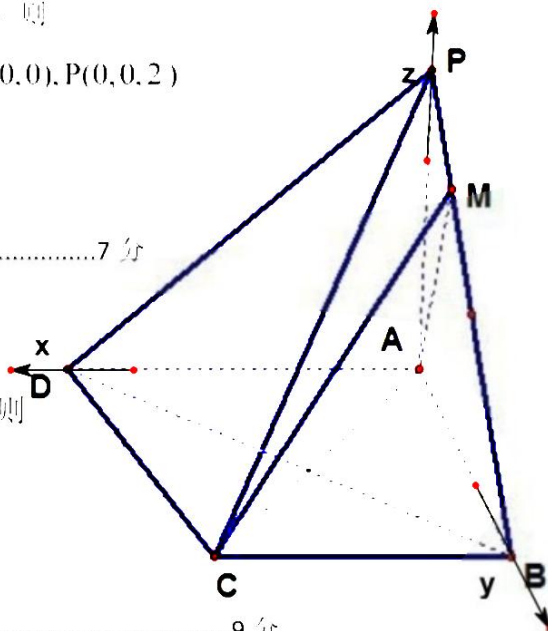
$$\because 3\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MB} \therefore M(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

设平面 MAC 的法向量 $\vec{m} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AC} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AM} = 0 \end{cases} \therefore \vec{m} = (3, -3, 1)$$

$$\text{又平面 } PAC \text{ 的法向量 } \vec{n} = (1, -1, 0) \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = \frac{3\sqrt{38}}{19} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$





$\therefore$ 二面角 $M-AC-P$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{38}}{19}$ 12 分

19. 解: (1) 由余弦定理得: $c^2 - a^2 - b^2 = -2ab\cos C$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(c^2 - a^2 - b^2) = -\frac{\sqrt{3}}{2}ab\cos C$$

$$\angle S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C,$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab\sin C = -\frac{\sqrt{3}}{2}ab\cos C, \text{ 即 } \tan C = -\sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because 0 < C < \pi, \therefore C = \frac{2\pi}{3} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 设 $BC = t$, 则 $CD = 2t$

$$\text{由余弦定理得: } \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{4t^2 + 4 - 4t}{t^2 + 4 + 2t} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$= 4 - \frac{12}{(t+1) + \frac{3}{t+1}} \geq 4 - 2\sqrt{3} \quad (\text{当且仅当 } t = \sqrt{3} - 1 \text{ 时, 等号成立}) \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} \text{ 的最小值为 } \sqrt{3} - 1. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解: (1) $y^2 = 8x$ 4 分

(2) 设直线 l 的方程为 $x = ty - 2$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, ($y_1 > 0, y_2 > 0$) 则

$$\text{由 } \begin{cases} x = ty - 2 \\ y^2 = 8x \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 8ty + 16 = 0$$

$$\Delta = 64(t^2 - 1) > 0$$

$$\therefore \begin{cases} y_1 + y_2 = 8t \\ y_1 y_2 = 16 \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\therefore \vec{NA} = 6\vec{AF} \therefore y_N = 7y_1 \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\angle S_{\triangle BNF} = S_{\triangle BMF} - S_{\triangle AMF} = 2(|y_2| - |y_1|) = 2y_2 - 2y_1$$



$$S_{\triangle AMN} = S_{\triangle NMF} - S_{\triangle AMF} = 2(|y_N| - |y_1|) = 12y_1 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} + S_{\triangle AMN} = 10y_1 + 2y_2 \geq 2\sqrt{10y_1 \cdot 2y_2} = 16\sqrt{5} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(当且仅当 $y_1 = \frac{4\sqrt{5}}{5}$, $y_2 = 4\sqrt{5}$ 时, “=” 成立)

此时, 直线 l 的方程为 $\sqrt{5}x - 3y + 2\sqrt{5} = 0$ 12 分

21. 解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2x = \frac{2x^2 + a}{x} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

1) 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;2 分

2) 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -\sqrt{\frac{a}{2}}$ (舍去) 或 $x = \sqrt{\frac{a}{2}}$

$\therefore$ 当 $x \in (0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 上为减函数, 在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上为增函数5 分

(2) 当 $a=2$ 时, $f(x) = 2\ln x + x^2 - 1$

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{x} + 2x > 0, \text{ 且 } f(1) = 0$$

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数7 分

$\therefore$ 有两个不相等的整数 m, n , 满足 $f(m) + f(n) = 0$

$\therefore$ 不妨设 $0 < m < 1 < n$, 要证明 $m+n > 2$, 即证 $n > 2-m$,

即证 $f(n) > f(2-m)$

又 $f(m) + f(n) = 0 \therefore$ 即证 $-f(m) > f(2-m)$,

即证 $f(m) + f(2-m) < 0$



即证 $f(m) + f(2-m) = 2[\ln(2m-m^2) - (2m-m^2) + 1] < 0$ 9 分

令 $t = 2m - m^2, m \in (0, 1)$, 则 $t \in (0, 1)$

即证 $\ln t - t + 1 < 0, t \in (0, 1)$ 10 分

令 $g(t) = \ln t - t + 1, t \in (0, 1)$ 则 $g(t)' = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$

$\therefore$ 函数 $g(t)$ 在 $(0, 1)$ 上为增函数

$\therefore g(t) < g(1) = 0$, 得证12 分

22. 解: (1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 5 分

(2) 将曲线 C_1 的参数方程代入曲线 C 得: $\frac{(1+t\cos\alpha)^2}{2} + (t\sin\alpha)^2 = 1$

即 $(1+\sin^2\alpha)t^2 + 2\cos\alpha \cdot t - 1 = 0$ 7 分

设 A, B 两点对应的参数分别为 t_1, t_2 , 则 $\begin{cases} \Delta = 4\cos^2\alpha + 4(1+\sin^2\alpha) = 5 \\ t_1 + t_2 = -\frac{2\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha} \\ t_1 \cdot t_2 = -\frac{1}{1+\sin^2\alpha} \end{cases}$ 8 分

$\therefore \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \frac{1}{|t_1|} + \frac{1}{|t_2|} = \frac{|t_1| + |t_2|}{|t_1 t_2|} = \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 t_2|}$ 9 分

$= \frac{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}}{|t_1 t_2|} = 2\sqrt{2}$ 10 分

23. 解: (1) 由题意得: $\left| \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \right| \leq 1$

$\therefore -1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 \leq 1$, 即 $1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 3$

$\therefore \log_1 3 \leq x \leq 0$.

$\therefore$ 不等式的解集为 $\left[\log_1 3, 0 \right]$ 5 分

(2) $\because g(x) = |x| + |x-1| \geq |x - (x-1)| = 1$



∴函数 $g(x)$ 的最小值为1, 即 $m=1$7 分

$$\therefore a+b+c=1$$

$$\therefore \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

$$= \left(\frac{a^2}{b} + b\right) + \left(\frac{b^2}{c} + c\right) + \left(\frac{c^2}{a} + a\right) - 1$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b} \cdot b} + 2\sqrt{\frac{b^2}{c} \cdot c} + 2\sqrt{\frac{c^2}{a} \cdot a} - 1$$

$$= 2(a+b+c) - 1 = 1$$

(当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时, 等号成立)

∴不等式得证.10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线