2023届浙江省单独考试温州市模拟测试

数学试卷评析　　　　2023.3

一、单项选择题(本大题共20小题,1－10小题每小题2分,11－20小题每小题3分,共50分)
(在每小题列出的四个备选答案中,只有一个符合题目的要求.错涂、多涂或未涂均不得分)

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,3,4\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{1,3\}$　　B. $\{1,2,3\}$　　C. $\{1,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

杭州谢幼平提供评析

【答案】D

【解析】根据并集的定义可得,选 D.

2. 已知函数 $f(x)=\log_2(x-3)$, 则该函数的定义域为

A. $[3,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(2,3)$　　D. $(0,3)$

杭州谢幼平提供评析

【答案】B

【解析】对数函数的真数大于零,即 $x-3>0$,解得 $x>3$,故选 B.

3. $a,b,c\in R$,且 $a>b$,下列不等式恒成立的是

A. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$　　B. $ac>bc$　　C. $a+c>b+c$　　D. $c-a>c-b$

杭州谢幼平提供评析

【答案】C

【解析】不等式两边加上同一个数,不等号的方向不变,故选 C.

4. 经过点 $(-2,2)$ 且与直线 $2x+y+5=0$ 平行的直线方程为

A. $2x+y=0$　　B. $2x+y-2=0$　　C. $2x-2y+4=0$　　D. $2x+y+2=0$

杭州谢幼平提供评析

【答案】D

【解析】与直线 $2x+y+5=0$ 平行的直线方程可设为 $2x+y+m=0$,将点 $(-2,2)$ 代入解得 $m=2$,所以直线方程为 $2x+y+2=0$,故选 D.

5. $\sin2022^\circ\cos2023^\circ$ 的值为

A. 正数　　B. 负数　　C. 1　　D. 0

杭州谢幼平提供评析

【答案】A

【解析】因为 $2022^\circ=360^\circ\times5+222^\circ$,$2023^\circ=360^\circ\times5+223^\circ$,所以 2022° 和 2023° 是第三象限角,则 $\sin2022^\circ<0$,$\cos2023^\circ<0$,$\sin2022^\circ\times\cos2023^\circ>0$,故选 A

6. 2023 年亚运会在杭州举行，某职校有 6 名男生和 2 名女生报名参加志愿服务，现从中选 3 人，至少有 1 名女生的选法有

A. 56 种　　B. 36 种　　C. 30 种　　D. 15 种

杭州谢幼平提供评析

【答案】B

【解析】至少一名女生：第一类，有一名女生和两名男生，选法有 $C_2^1C_6^2=30$；第二类，有两名女生和一名男生，选法有 $C_2^2C_6^1=6$．故总共的选法有 $30+6=36$，故选 B

7. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$

A. 模相等　　B. 方向相反　　C. 方向相同　　D. 相互垂直

杭州谢幼平提供评析

【答案】C

【解析】根据向量的三角形法则和三角形的两边之和大于第三边知，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，当等号成立时，两个向量的方向相同. 故选 C.

8. 点 $P(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 关于 y 轴的对称点为

A. $(\mathrm{e}^2,\mathrm{e})$　　B. $(-\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$　　C. $(\mathrm{e},-\mathrm{e}^2)$　　D. $(\mathrm{e}^3,\mathrm{e}^4)$

杭州谢幼平提供评析

【答案】B

【解析】点关于 y 轴对称，横坐标变为相反数，纵坐标不变，故选 B.

9. 经过点 $P(1,1)$，且与抛物线 $y^2=x$ 有且只有一个公共点的直线有

A. 0 条　　B. 1 条　　C. 2 条　　D. 3 条

杭州谢幼平提供评析

【答案】C

【解析】① 当直线的斜率不存在时，此直线 $x=1$ 与抛物线有两个交点，应舍去；

② 当斜率存在时，设斜率为 k，则直线方程为 $y-1=k(x-1)$，即 $y=kx+1-k$，联立方程则

$\begin{cases} y=kx+1-k \\ y^2=x \end{cases}$，消去 y 得，$k^2x^2+(2k-2k^2-1)x+k^2-2k+1=0$

因为只有一个公共点

当 $k^2=0$，即 $k=0$ 时有一个交点，此时直线方程为 $y=1$；

当 $k^2\neq0$ 时，$\Delta=(2k-2k^2-1)^2-4k^2(k^2-2k+1)=0$，解得，$k=\dfrac{1}{2}$，此时直线方程为

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$，即 $x-2y+1=0$.

综上所述，有两条直线满足题意，故选 C.

10. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ 的值为

A. -1　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{5}$

杭州张永忠提供评析

【答案】C

【解析】方法一：$\because \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\Rightarrow\sin\alpha=2\cos\alpha$　$\therefore$ 原式 $=\dfrac{2\cos\alpha-\cos\alpha}{2\cos\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{1}{3}$

方法二：原式 $=\dfrac{\tan\alpha-1}{\tan\alpha+1}=\dfrac{2-1}{2+1}=\dfrac{1}{3}$(分子分母同时除以 $\cos\alpha$)

11. 2^6 与 0.25 的等比中项是

A. 16　　B. ±16　　C. 4　　D. ±4

杭州张永忠提供评析

【答案】D

【解析】由 $G^2=\pm\sqrt{ab}$ 知，等比中项为 $\pm\sqrt{2^6\times0.25}=\pm4$

12. 两圆 $x^2+y^2-4=0$ 与 $x^2+y^2-4x-4y+4=0$ 相交于 A,B 两点，则直线 AB 的方程是

A. $x+y+2=0$　　B. $x+y-2=0$　　C. $x-y-2=0$　　D. $x-y+2=0$

杭州张永忠提供评析

【答案】B

【解析】$\begin{cases}x^2+y^2-4=0\\x^2+y^2-4x-4y+4=0\end{cases}\Rightarrow 4x+4y-8=0$ 即 $x+y-2=0$

13. 角 α 的终边与单位圆交于点 $P\left(x_0,\dfrac{1}{2}\right)(x_0>0)$，若角 α 的终边绕原点顺时针旋转 60° 后，此时与单位圆的交点坐标为

A. $\left(\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\sqrt3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$　　C. $\left(-\dfrac{\sqrt3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $\left(-\dfrac{\sqrt3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$

杭州张永忠提供评析

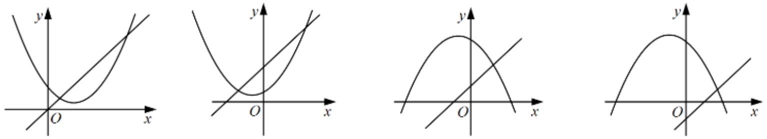
【答案】B

【解析】由三角函数的定义知：$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{2}$(单位圆 $r=1$)，故 α 与 30° 角的终边相同，

顺时针旋转 60° 后则与 $30^\circ-60^\circ=-30^\circ$ 的终边相同，在第四象限.

所以与单位圆的交点坐标 $(\cos30^\circ,-\sin30^\circ)=\left(\dfrac{\sqrt3}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$

14. 函数 $y=ax+b$ 和函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 在同一直角坐标系内的图像可能是



A.　　B.　　C.　　D.

杭州张永忠提供评析

【答案】B

【解析】观察图像发现，所有直线在 R 上均单调递增，所以 $a>0$，选项 C,D 却开口向下，排除；A 选项中，直线过原点，所以 $b=0$，而抛物线的对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}\neq0$，所以 A 错

15. 设 $f(x)$ 是定义域 R 的周期函数，其最小正周期为 4，当 $0\leqslant x<4$ 时，$f(x)=2x$，则 $f(5)=$

A. 1　　B. 2　　C. 8　　D. 10

杭州张永忠提供评析

【答案】B

【解析】因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 4，即 $f(x)=f(x+4)$，有 $f(5)=f(4+1)=f(1)$；由 $f(x)=2x\ (0\leqslant x<4)$ 得：$f(5)=f(1)=2\times1=2$

16. "$\alpha<90^{\circ}$"是"$\sin\alpha>0$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

杭州朱江丽提供评析

【答案】D

【解析】$\alpha<90^{\circ}$，α 可以是任意象限角，无法推出 $\sin\alpha>0$；$\sin\alpha>0$，α 为第一，第二象限角，无法推出 $\alpha<90^{\circ}$，所以"$\alpha<90^{\circ}$"是"$\sin\alpha>0$"的既不充分也不必要条件，故选 D

17. 已知函数 $y=f(x)$ 的对应关系如下表格所示，若 $f[f(a)]=3$，则 a 的值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

x	1	2	3	4
$f(x)$	2	3	4	1

杭州朱江丽提供评析

【答案】A

【解析】$f[f(a)]=3$，可知 $f(a)=2$，$a=1$，故选 A

18. 已知动点 $P(x,y)$ 满足 $x^2+y^2=1$，则 $t=2x+y$ 的取值范围为

A. $[-5,5]$　　B. $[-\sqrt{5},\sqrt{5}]$　　C. $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$　　D. $(-5,5)$

杭州朱江丽提供评析

【答案】B

【解析】解法一：设 $x=\cos\alpha$，$y=\sin\alpha$，$t=2\cos\alpha+\sin\alpha$，所以最大值为 $\sqrt{5}$，最小值为 $-\sqrt{5}$.

解法二：将 $t=2x+y\Leftrightarrow y=t-2x$ 代入方程 $x^2+y^2=1$，

$x^2+(t-2x)^2=1$，整理得：$5x^2-4tx+t^2-1=0$，

$\triangle=(-4t)^2-4\times5\times(t^2-1)=-4t^2+20\geqslant0$，$-\sqrt{5}\leqslant t\leqslant\sqrt{5}$ 故选 B

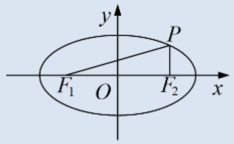
19. 椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，已知 P 是椭圆上的一点，且 $PF_2\perp F_1F_2$，$\angle PF_1F_2=30^{\circ}$，则椭圆的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

杭州朱江丽提供评析

【答案】D



【解析】由题意得 $|PF_2|=|F_1F_2|\cdot\tan30^{\circ}=2c\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c$,

$|PF_1|=2|PF_2|=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}c$, $|PF_1|+|PF_2|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}c+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}c=2\sqrt{3}$

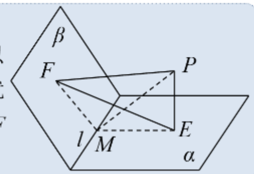
又 $\because |PF_1|+|PF_2|=2a$,即 $2\sqrt{3}c=2a$, $\therefore \mathrm{e}=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 D

20. 二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小为 120°,从空间一点 P 向二面角 $\alpha-l-\beta$ 的两个面 α,β 分别作垂线 PE,PF,垂足分别是 E,F,$PE=2$,$PF=3$,则点 E,F 之间的距离为

A. 2　　　B. $\sqrt{7}$　　　C. $2\sqrt{2}$　　　D. 3

杭州朱江丽提供评析

【答案】B



【解析】过 E 作 $EM\perp l$, 垂足为 M,连接 PM,EF, 因为 $PE\perp\alpha$, 所以 $l\perp PE$,$l\perp$ 平面 PEM, 所以 $l\perp PM$,$l\perp$ 平面 PFM,$l\perp MF$,$\angle EMF$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角,所以 $\angle EMF=120^{\circ}$, $\angle EPF=60^{\circ}$, $EF=\sqrt{PE^2+PF^2-2PE\cdot PF\cdot\cos60^{\circ}}=\sqrt{7}$, 故选 B

二、填空题 (本大题共 **7** 小题, 每小题 **4** 分, 共 **28** 分)

21. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=2,a_2=5$,则 $a_5=$ ______

杭州段蕊提供评析

【答案】14

【解析】根据等差数列的特点, $d=a_2-a_1=5-2=3$

$a_5=a_1+4d=2+4\times3=14$

22. 若 $x>0$,则 $x+\dfrac{6}{x}$ 的最小值为 ______

杭州段蕊提供评析

【答案】$2\sqrt{6}$

【解析】$\because x>0,\therefore \dfrac{6}{x}>0$, 根据均值定理知:

$x+\dfrac{6}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\dfrac{6}{x}}=2\sqrt{6}$

$\therefore x+\dfrac{6}{x}$ 的最小值为 $2\sqrt{6}$.

23. 已知 $\tan2\alpha=2,\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,则 $\tan\alpha=$ ______

杭州段蕊提供评析

【答案】$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

【解析】$\because \alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),\therefore \tan\alpha<0$

又 $\because \tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=2\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

24. 已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\mathrm{e}=\dfrac{3}{5}$,它们的一个焦点在抛物线 $y^2=24x$ 的准

线上，则该椭圆的标准方程为 ______

杭州段蕊提供评析

【答案】$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$

【解析】根据椭圆的图像特点以及方程的特点，可知焦点在 x 轴上.

又根据抛物线的方程 $y^2=24x$ 可知，准线方程为：$x=-6$.

$\therefore$ 椭圆的一个焦点为 $(-6,0)$，即 $c=6$

又根据 $e=\dfrac{3}{5}=\dfrac{c}{a}$，可得 $a=10$

再根据 $a^2-c^2=b^2\Rightarrow b^2=64$

$\therefore$ 椭圆的标准方程为 $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

25. 若 $(3x-2)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=$ ______

杭州杨增华提供评析

【答案】-15

【解析】$\because x=1$ 时，$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4=(3-2)^4=1$

$\because x=0$ 时，$a_0=(0-2)^4=16$.

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4=(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4)-a_0=1-16=-15$

26. 已知圆柱形容器内部原来盛有高为 8 cm 的水，现放入 3 个相同的实心铁球（球的半径与圆柱的底面半径相同）后，水恰好淹没最上面的球，则铁球的半径是 ______ cm.

杭州杨增华提供评析

【答案】4

【解析】由题意，$V_{容积}=V_{水}+V_{铁球}$

$\because \pi R^2\times(6R)=\pi R^2\times 8+\dfrac{4}{3}\pi R^3\times 3$

$\therefore 6R=8+4R$

$\therefore R=4$

27. 有 10 张卡片，分别标注数字 1,2,⋯,10，从中不放回到任取两张，则“两张卡片数字乘积是 10 的整数倍”的概率是 ______

杭州杨增华提供评析

【答案】$\dfrac{13}{45}$

【解析】本题需要分类讨论.

卡片有一张为 10，另外一张卡片为 1，2，3，4...9，共有 9 种.

卡片有一张为 5，另外一张卡片为 2，4，6，8，10，共有 5 种.

其中卡片选中 5 和 10 有重叠.

所以“两张卡片数字之积是 10 的整数倍”概率是 $P(A)=\dfrac{9+5-1}{C_{10}^2}=\dfrac{13}{45}$

三、解答题（本大题共 **8** 小题，共 **72** 分）

28.（本题 7 分）计算：$\left(\dfrac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}+2\sin\dfrac{\pi}{6}+(2023!)^0-\lg 0.1+\sqrt{(-3)^2}+C_{2023}^{2022}$

杭州许根锡提供评析

【评析】本题山多个计算式子组合而成，考查综合计算能力，考点在指数运算、对数运算、0 次幂、开方、组合数、排列数、阶乘、特殊角的三角函数值等，难度不大，但要仔细.

解: 原式 $=2^{-3\times(-\frac{1}{3})}+2\times\frac{1}{2}+1-(-1)+|-3|+C_{2023}^{1}$

$=2+1+1+1+3+2023$

$=2031$

29. (本题 8 分) 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi-x), x\in R$.

(1) 求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值; (3 分)

(2) 求函数 $f(x)$ 的最大值，并写出取到最大值时 x 的集合.(5 分)

杭州许根锡提供评析

【评析】本题考查三角变换中的和角公式，并对诱导公式、特殊角的三角函数值、三角函数的最值也有综合考查. 在 $y=a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 的转化过程中，如果 $|a|:|b|=1:\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3}:1$ 或 $1:1$ 等特殊情况时，需要确定 φ 的值，本题中 $|a|:|b|=1:\sqrt{3}$，所以要运用和角公式求出 φ，才能准确完成第 2 个问题. 在计算第 1 问时可以直接代入求值.

解: (1) $f(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi-\frac{\pi}{6})$

$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}$.

(2) $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\pi-x)$

$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$

$=\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}$

$=\sin(x-\frac{\pi}{3})$

所以函数 $f(x)$ 有最大值 $y_{\max}=1$，

此时 $x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$，

即当函数取到最大值 1 时，x 的取值的集合为 $\{x|=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)\}$.

30. (本题 9 分) 已知圆 $C:x^2+y^2-2y-3=0$，过点 $P(1,1)$ 且斜率为 2 的直线 l 与圆 C 相交于 A,B 两点.

(1) 求圆 C 的圆心坐标和半径;(3 分)

(2) 求弦长 $|AB|$.(6 分)

杭州张英华提供评析

【评析】本题考查圆的标准方程以及圆与直线的相交弦长.

解:(1)将圆 $C: x^2+y^2-2y-3=0$ 的方程化为标准方程，为:$x^2+(y-1)^2=4$

故圆心为 $(0,1)$，半径为 2

(2)如图，l 过点 $P(1,1)$ 且斜率为2，故 l 的方程为：

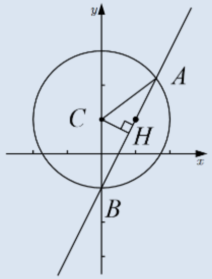
$y-1=2\times(x-1)$，即 $2x-y-1=0$

圆心 $(0,1)$ 到直线 l 的距离 $d=|HC|=\dfrac{|2\times0-1-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

在 $Rt\triangle AHC$ 中，$|HC|^2+|HA|^2=|AC|^2$，且 $|HC|=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$|AC|=r=2$

即 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+|HA|^2=2^2$，解之得 $|HA|=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

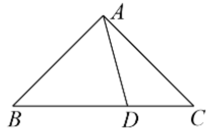
所以，弦长 $|AB|=2|HA|=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$



31. (本题9分) 如图所示，在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，D 为 BC 边上一点，$AD=2$，$CD=\sqrt{2}$.

(1) 求 $\angle DAC$ 的大小；(4分)

(2) 求 $\triangle ABD$ 的面积.(5分)



第31题图

杭州张英华提供评析

【评析】本题考查解三角形，可用正弦定理、三角形面积公式来解.

解：(1)由已知得 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，故 $\angle C=45°$

有正弦定理有：$\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{\sin\angle C}{\sin\angle DAC}$

即 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sin45°}{\sin\angle CAD}$，解之得 $\sin\angle DAC=\dfrac{1}{2}$

故 $\angle DAC=30°$ 或 $120°$（舍）

(2) $\angle ADC=180°-\angle C-\angle DAC=180°-45°-30°=105°$

由正弦定理有：$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sin\angle ADC}{\sin\angle C}$

即 $\dfrac{AC}{2}=\dfrac{\sin105°}{\sin45°}$，由于 $\sin105°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，$\sin45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

解之得 $AC=\sqrt{3}+1$

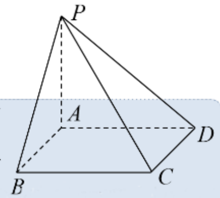
所以，$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AB-\dfrac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin\angle ADC$

$=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3}+1)^2-\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

32. (本题9分) 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 面 $ABCD$，若 $AB=2$，$AD=2\sqrt{2}$，$PA=2$.

(1) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积和 $\triangle PBC$ 的面积；(5分)

(2) 求直线 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的大小.(4分)



杭州杨裕铨提供评析

【评析】此题相对容易，第1问求体积和面积，熟记公式，找准公式中相关线与面即可求得. 第2问求线面角，要找出直线在平面内的射影，直线与射影所成的角为所求线面角.

解：(1) 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面积 $S_{ABCD}=AB\cdot AD=2\times2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

高 $PA=2$

所以体积 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PA=\frac{1}{3}\times 4\sqrt{2}\times 2=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

$\because BC\perp AB$，AB 是 PB 在平面 $ABCD$ 内的射影

$\therefore BC\perp PB$，ΔPBC 为直角三角形

$S_{\Delta PBC}=\frac{1}{2}BC\times PB=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2^2+2^2}=4$

(2)AC 是 PC 在平面 $ABCD$ 内的射影

所以 $\angle PCA$ 是 PC 与平面 $ABCD$ 所成角

$PA=2, AC=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$

所以 $\tan\angle PCA=\frac{PA}{AC}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \angle PCA=30^\circ$

33.(本题 10 分)商家在 30 天内销售某时令水果，已知每斤水果的日销售利润 p(元)与时间 t(天)的关系满足函数：

$$p(t)=\begin{cases}\frac{1}{10}t+2, 0<t<20, t\in N^*,\\ -\frac{1}{10}t+6, 20\leqslant t\leqslant 30, t\in N^*.\end{cases}$$

这种水果的日销售量 q(斤)关于时间 t(天)满足下列表格，并符合一次函数关系.

第 t 天	2	8	16	24
q(斤)	38	32	24	16

(1)根据表格，求日销售量 q(斤)关于时间 t(天)的函数解析式;(4 分)

(2)假设这种水果的日销售总利润记作 y(元)，写出 y(元)关于 t(天)的函数关系式，并求出这 30 天中第几天的销售利润最大，最大值为多少？(6 分)

杭州杨裕铨提供评析

【评析】每斤水果的利润是时间的分段函数，销售量是时间的一次函数，则总利润也是时间的分段函数，求总利润最值，需比较各分段上的最值，最大者为符合本题的答案.

解：(1)设 $q=at+b$ 则

$\begin{cases}38=2a+b\\32=8a+b\end{cases}$，得 $a=-1, b=40$，所以 $q=-t+40, 0<t\leqslant 30, t\in N^*$

$$(2)y=qp=\begin{cases}(-t+40)\left(\frac{1}{10}t+2\right)\\(-t+40)\left(-\frac{1}{10}t+6\right)\end{cases}=\begin{cases}-\frac{1}{10}t^2+2t+80, 0<t<20, t\in N^*\\ \frac{1}{10}t^2-10t+240, 20\leqslant t\leqslant 30, t\in N^*\end{cases}$$

当 $0<t<20, t\in N^*$ 时，$t=10$ 时，$y_{1-\max}=90$

当 $20\leqslant t\leqslant 30, t\in N^*$ 时，$y=\frac{1}{10}t^2-10t+240$ 为减函数，当 $t=20$ 时，$y_{2-\max}=80$

综上当 $t=10$ 时，$y_{\max}=90$

所以第 10 天销售利润最大，最大值为 90 元

34.(本题 10 分)在数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=1$，点 $P_n(a_n, a_{n+1})(n\in N^*)$ 在直线 $x-y+1=0$ 上

(1) 写出 a_2,a_3,a_4 的值;(6 分)

(2) 设 $b_n=a_n+\frac{1}{3}$,证明数列 $\{b_n\}$ 是等比数列,并写出它的通项;(3 分)

(3) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n.(4 分)

杭州吴春初提供评析

【评析】本题考查等比数列的概念、通项公式、求和公式,建立数列的递推关系之后,会求数列的前几项,根据等比数列的概念进行验证.

解:(1)因为点 P 在直线上,满足直线方程,得

$4a_n-a_{n+1}+1=0$,

$\therefore a_{n+1}=4a_n+1$.

所以 $a_2=4a_1+1=5$,

$a_3=4a_2+1=21$,

$a_4=4a_3+1=85$,

(2)因为 $b_n=a_n+\frac{1}{3}$,则 $b_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{3}$,

$b_{n+1}=4a_n+1+\frac{1}{3}=4(a_n+\frac{1}{3})$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{4(a_n+\frac{1}{3})}{a_n+\frac{1}{3}}=4.$$

所以数列$\{b_n\}$ 是以 $a_1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ 为首项,以 4 为公比的等比数列,

即 $b_n=\frac{4}{3}\times 4^{n-1}$, $b_n=\frac{4^n}{3}$,$(n\in N*)$

(3)因为 $b_n=a_n+\frac{1}{3}$, 则 $a_n=\frac{4^n}{3}-\frac{1}{3}$

数列的前 n 项之和为

$$T_n=(\frac{4^1}{3}-\frac{1}{3})+(\frac{4^2}{3}-\frac{1}{3})+(\frac{4^3}{3}-\frac{1}{3})+\ldots\ldots+(\frac{4^n}{3}-\frac{1}{3})$$

$$=\frac{1}{3}(4^1+4^2+4^3+\ldots+4^n)-\frac{1}{3}n$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{4(1-4^n)}{1-4}-\frac{1}{3}n$$

即 $T_n=\frac{4}{9}(4^n-1)-\frac{1}{3}n$

35. (本题 10 分) 已知中心在坐标原点的双曲线 C 的右焦点为 $(2,0)$,实轴长为 $2\sqrt{3}$,直线 $l:y=kx+\sqrt{2}$ 与双曲线 C 交于 A,B 两点.

(1) 求双曲线的标准方程;(4 分)

(2) 当 $k=\frac{1}{2}$ 时,求 A,B 两点之间的距离;(4 分)

(3) 若 A,B 两点均在双曲线 C 的左支上,求 k 的取值范围.(2 分)

杭州吴春初提供评析

【评析】本题考查双曲线的标准方程、焦点坐标、实轴长、渐近线方程等;结合直线与双曲线相交,考查弦长问题;数形结合,分析直线与双曲线有两个交点时,斜率的取值范围.

解:(1)双曲线的焦点(2，0)，实轴长$2a=2\sqrt{3}$，$c=2,a=\sqrt{3}$,

$\therefore a^2=3,b^2=4-3=1$

所以双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2)联立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}-y^2=1\\ y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{2}\end{cases}，得\ x^2-12\sqrt{2}x-36=0，$$

弦长得$|AB|=\sqrt{1+k^2}\times\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}\times\sqrt{144\times2+4\times36}=6\sqrt{15}$.

(3)双曲线$\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$的渐近线为$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}x}{3}$,

联立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}-y^2=1\\ y=kx+\sqrt{2}\end{cases}，得\ (3k^2-1)x^2-6\sqrt{2}kx-9=0，$$

当$\Delta=(6\sqrt{2}k)^2-36((3k^2-1)=0$时，直线与双曲线相切，即$k^2=1$，$k=\pm1$,

如图，当$\dfrac{\sqrt{3}}{3}<k<1$时，直线与双曲线的左支恰好有两个交点.