江西省“九江十校”2023届高三第二次联考

数　学(文科)

本试卷共4页,22题。全卷满分150分,考试时间120分钟。

考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。来源:高三答案公众号

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用2B铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

5. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

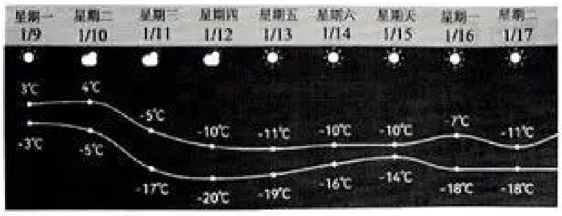
1. 已知集合 $M=\{x\mid \log_2 x<1\}$,集合 $N=\{x\mid -1<x<1\}$,则 $M\cup N=$

A. $(0,1)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(0,2)$　　D. $(-\infty,2)$

2. 若复数 $z=\dfrac{i}{2-i}$(i是虚数单位)的共轭复数是 $\bar{z}$,则 $\bar{z}$ 的虚部是

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $-\dfrac{1}{5}$　　C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $-\dfrac{2}{5}$

3. 2022年三九天从农历腊月十八开始计算,也就是2023年1月9日至17日,是我国北方地区一年中最冷的时间.下图是北方某市三九天气预报气温图,则下列对这9天判断错误的是



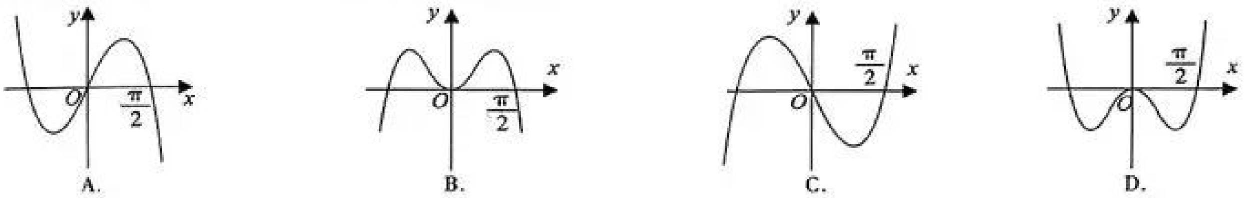
A. 昼夜温差最大为12℃　　B. 昼夜温差最小为4℃

C. 有3天昼夜温差大于10℃　　D. 有3天昼夜温差小于7℃

4. 已知 $\sin\theta+2\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{5}{4}$,则 $\sin2\theta=$

A. $-\dfrac{15}{16}$　　B. $\dfrac{15}{16}$　　C. $-\dfrac{3}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

5. 函数 $f(x)=(e^{-x}-e^{x})\cos x$ 的部分图象大致为



6. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$，若 D 是 BC 的中点，则 $AD=$

A. 1　　B. 3　　C. 4　　D. 5

7. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 图象上相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，将函数 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后，得到的图象关于 y 轴对称，则函数 $f(x)$ 的一个零点是

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{12}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{12}$

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，其导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)>f'(x)+1$，$f(0)=2023$，则不等式 $e^{-x}f(x)>e^{-x}+2022$（其中 e 为自然对数的底数）的解集是

A. $(2022,+\infty)$　　B. $(-\infty,2023)$　　C. $(0,2022)$　　D. $(-\infty,0)$

9. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$4\cos A\sin B=1$，若 BC 在 AB 上的投影长等于 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R，则 $R=$

A. 4　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

10. 已知 e 是自然对数的底数，则下列不等关系中正确的是

A. $e^{\pi}<3^{\pi}$　　B. $\pi^{e}>e^{\pi}$　　C. $2^{e}<e^{2}$　　D. $e^{3}<3^{e}$

11. 已知动圆过定点 $M(0,4)$，且在 x 轴上截得的弦 AB 的长为 8. 过此动圆圆心轨迹 C 上一个定点 $P(m,2)$ 引它的两条弦 PS，PT，若直线 PS，PT 的倾斜角互为补角，记直线 ST 的斜率为 k，则 $mk=$

A. 4　　B. 2　　C. -4　　D. -2

12. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F 分别是棱 A_1D_1 和棱 C_1D_1 的中点，G 为棱 BC 上的动点（不含端点）.

①三棱锥 D_1-EFG 的体积为定值；

②当 G 为棱 BC 的中点时，$\triangle EFG$ 是锐角三角形；

③$\triangle EFG$ 面积的取值范围是 $\left(\frac{3}{8},\frac{\sqrt{17}}{8}\right)$；

④若异面直线 AB 与 EG 所成的角为 α，则 $\sin\alpha\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$.

以上四个命题中正确命题的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+1>0$，则 $\neg p$ 为__________.

14. 过点 $A(0,1)$ 作斜率为 k 的直线 l 交双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 于 P_1,P_2 两点，线段 P_1P_2 的中点在直线 $x=\frac{1}{2}$ 上，则实数 k 的值为__________. 来源：高三答案公众号

15. 已知圆锥 DO 的轴截面为等边三角形，$\triangle ABC$ 是底面⊙O 的内接正三角形，点 P 在高 DO 上，且 $PO=\lambda DO$. 若 $PA\perp$ 平面 PBC，则实数 $\lambda=$__________.

16. 著名科学家牛顿用"作切线"的方法求函数的零点时，给出了"牛顿数列"，它在航空航天中应用广泛. 其定义是：对于函数 $f(x)$，若数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$，则称数列 $\{x_n\}$ 为牛顿数列. 若函数 $f(x)=x^2$，$a_n=\log_2 x_n$，且 $a_1=1$，则 $a_8=$__________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17-21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17. (12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$S_n=n^2+n$，$\{b_n\}$ 是等比数列，$b_1=a_1$，$b_2=\frac{a_1a_2}{2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{1}{S_n}+b_n\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (12 分)

某省电视台为及时向人民群众传达二十大精神，在二十大召开期间，决定调整播放节目. 现对收看曲艺节目和新闻节目观众的喜爱与否作抽样调查，随机抽取了 100 名电视观众，相关数据统计如下表所示：

性别 \ 喜爱	曲艺节目	新闻节目
男性	15	27
女性	40	18

(1) 用分层抽样方法在收看新闻节目的观众中随机抽取 5 名，则女性观众应该抽取几名？

(2) 在上述抽取的 5 名观众中任取 2 名参加座谈会，求恰有 1 名男性观众的概率；

(3) 试判断是否有 99%的把握认为，性别与喜爱节目的类型有关？

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

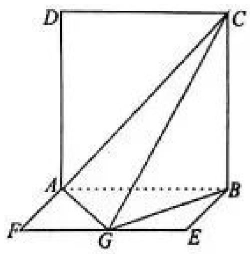
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

19. (12分)

如图,四边形 $ABCD$ 是正方形,$ABEF$ 是矩形,平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$,$AF=\frac{1}{2}AB=2$,G 是 EF 上一点且 $EG=m(0<m<4)$.

(1)当 $m=2$ 时,求证:平面 $AGC\perp$ 平面 BGC;

(2)当 $m=1$ 时,求直线 AC 与平面 BCG 所成角的余弦值.



20. (12分)

已知 P 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$上一点,过点 P 引圆 $x^2+y^2=2$ 的两条切线 PA、PB,切点分别为 A、B,直线 AB 与 x 轴、y 轴分别交于点 M、N.

(1)设点 P 坐标为(x_0,y_0),求直线 AB 的方程;

(2)求$\triangle MON$ 面积的最小值(O 为坐标原点).

21. (12分)

已知函数$f(x)=e^x+a\cos x$,其中 $x>0$,$a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=-1$ 时,讨论$f(x)$的单调性;

(2)若函数$f(x)$的导函数$f'(x)$在$(0,\pi)$内有且仅有一个极值点,求 a 的取值范围.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题做答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (10分)**选修4-4:坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中,$P(0,\sqrt{3})$.以坐标原点为极点,x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,已知圆锥曲线 C 的极坐标方程为$\rho^2(\sin^2\theta+3)=12$,$F_1$、$F_2$ 为 C 的左、右焦点,过点 F_1 的直线 l 与曲线 C 相交于 A,B 两点.

(1)当 $l\perp PF_2$ 时,求 l 的参数方程;

(2)求$|AF_1||BF_1|$的取值范围.

23. (10分)**选修4-5:不等式选讲**

设函数$f(x)=4x+|x-a|$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=6$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 与直线 $4x-y+8=0$ 围成的三角形的面积;

(2)若 $a<0$,且不等式$f(x)<2$的解集是$(-\infty,-3)$,求 a 的值.

江西省“九江十校”2023届高三第二次联考

文科数学参考答案

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分，在每小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求.

1.**答案**：B**解析**：因为$M=\{x|\log_2 x<1\}=(0,2)$，$N=(-1,1)$，所以$M\cup N=(-1,2)$，故选B.

2.**答案**：D **解析**：$z=\dfrac{i}{2-i}=\dfrac{i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{2i-1}{5}=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$，$\bar{z}=-\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}i$.故选D.

3.答案：C 解析：由气温图可知，选C。来源：高三答案公众号

4.**答案**：A **解析**：由已知$\sin\theta+2\cos^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{5}{4}$，**化简得**$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{4}$.平方得，$1+\sin 2\theta=\dfrac{1}{16}$，$\sin 2\theta=-\dfrac{15}{16}$.

故选A。

5.答案：C 解析：因为$f(x)=\cos x\left(e^{-x}-e^{x}\right)$，所以$f(-x)=-f(x)$，故函数$f(x)$的为奇函数。

又$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f(x)<0$，故选C。

6.答案：B 解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{DC}^2=\overrightarrow{AD}^2-1=8$，$AD=3$.故选B.

7.答案:B 解析：由函数$y=f(x)$图象相邻两条对称轴之间的距离为$\dfrac{\pi}{2}$可知其周期为π，所以$\omega=\dfrac{2\pi}{\pi}=2$，所以

$f(x)=\sin(2x+\varphi)$.将函数$y=f(x)$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位后，得到函数$y=\sin\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\varphi\right]$图象.因为得

到的图象关于y轴对称，所以$2\times\dfrac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in Z$，即$\varphi=k\pi-\dfrac{\pi}{6}$，$k\in Z$.又$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$.所以

$f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$.由$\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=0$得，$2x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi$，$x=\dfrac{1}{2}k\pi+\dfrac{\pi}{12}$.故选B.

8.**答案**：**D** **解析**：令$g(x)=e^{-x}[f(x)-1]$，则$g'(x)=e^{-x}[f'(x)-f(x)+1]<0$，所以$g(x)$在$R$上单减.

因为$g(0)=f(0)-1=2022$，故$e^{-x}f(x)>e^{-x}+2022$等价于$g(x)>g(0)$，所以$x<0$.故选D.

9.**答案**：**B** **解析**:因为ΔABC是锐角三角形，所以$BC\cdot\cos B=R$将$BC=2R\sin A$代入就是，$2R\sin A\cos B=R$，因此$\sin A\cos B=\dfrac{1}{2}$，即$4\sin A\cos B=2$.与已知条件$4\cos A\sin B=1$整体相加得，

$4\sin A\cos B+4\cos A\sin B=3$，即$4\sin(A+B)=3$，$4\sin C=3$，$\sin C=\dfrac{3}{4}$.

于是$2R=\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{3}{\frac{3}{4}}=4$，$R=2$. 故选B.

10.答案：C 解析：BCD 选项等价于 $\ln\pi > \frac{\pi}{e}, \ln 2 < \frac{2}{e}, \ln 3 > \frac{3}{e}$，构造函数 $f(x) = \ln x - \frac{x}{e}, x > 0$.

则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$. 当 $0 < x < e$ 时，$f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 内单增；当 $x > e$ 时，$f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 内

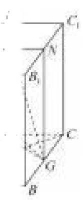
单减.因此 $f(x)_{\max} = f(e) = \ln e - \frac{e}{e} = 0$. 于是. $\ln\pi < \frac{\pi}{e}, \ln 2 < \frac{2}{e}, \ln 3 < \frac{3}{e}$。故 $e^{\pi} > \pi^{e}$，$e^{3} > 3^{e}$，所以 BD 错误，

所以 $e^{\pi} > \pi^{e} > 3^{e}$，A 错误。所以 $e^{2} > 2^{e}$ 故选 C。来源：高三答案公众号

11.答案：C 解析：设动圆圆心的坐标为（x, y），则 $(x-0)^2 + (y-4)^2 = 4^2 + y^2$. 整理得, $x^2 = 8y$. 故动圆圆心的轨迹 C 的方程为 $x^2 = 8y$.因此 $m^2 = 8 \times 2, m = \pm 4$. 当 $m = 4$ 时，设 S (x_1, y_1)，T (x_2, y_2)，则有

$x_1^{\,2} = 8y_1$, $x_2^{\,2} = 8y_2$.于是 $k_{PS} + k_{PT} = 0$ 就是 $\frac{y_1 - 2}{x_1 - 4} + \frac{y_2 - 2}{x_2 - 4} = \frac{\frac{1}{8}x_1^2 - 2}{x_1 - 4} + \frac{\frac{1}{8}x_2^2 - 2}{x_2 - 4} = \frac{x_1 + 4}{8} + \frac{x_2 + 4}{8} = 0$，所以

$x_1 + x_2 = -8$. 此时直线 ST 的斜率 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{8} = -1$，故 $mk = -4$。同理可得，当 $m = -4$ 时，直线 ST 的斜率 $k = 1$. 故 $mk = -4$．所以选 C.



12.答案：C 解析：如图，因为 $V_{D_1-EFG} = V_{G-EFD_1}$，点 G 到平面 EFD_1 的距离为定值，则三棱锥 $G-EFD_1$ 的体积为定值.①正确；设 CD 中点为 M，若 G 为 BC 中点，则有 $AC \perp MG$，$AC \perp MF$，$MG \cap MF = M$，则 $AC \perp$ 平面 MFG，则 $AC \perp FG$.因为 $EF // AC$，所以 $EF \perp FG$.②不正确；在侧面 BCC_1B_1 内作 $GN \perp B_1C_1$ 垂足为 N，设 N 到 EF 的距离 m，则 ΔEFG 边 EF 上的高为 $h = \sqrt{1+m^2}$，故其面积为 $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} h = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \sqrt{1+m^2}$.当 G 与 C 重合时时，$m = \frac{\sqrt{2}}{4}$，

$S = \frac{3}{8}$。当 G 与 B 重合时时，$m = \frac{3\sqrt{2}}{4}$，$S = \frac{\sqrt{17}}{8}$。故③正确；取 B_1C_1 中点为 N，连接 EN .因为 $EN // AB$，

所以异面直线 AB 与 EG 所成的角即为 $\angle NEG = \alpha$.在直角三角形 NEG 中，$\sin\alpha = \frac{NG}{EG}$.当 G 为 BC 中点时，

$\sin\alpha = \frac{NG}{EG} = \frac{\sqrt{2}}{2}$，当 G 与 B, C 重合时，$\sin\alpha = \frac{NG}{EG} = \frac{\sqrt{5}}{3}$，故 $\sin\alpha \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ 所以④正确.故选 C.

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13.答案：$\exists x \in R, x^2 - x + 1 \le 0$

14.答案：$\sqrt{3} - 1$ 解析:由题意可设 l 的方程为 $y = kx + 1$. 联立 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx + 1 \end{cases}$ 消去 y 得，$(2 - k^2)x^2 - 2kx - 3 = 0$.

显然 $2 - k^2 \ne 0$. 设 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{2k}{2 - k^2} = 1$，解得 $k = -1 \pm \sqrt{3}$.

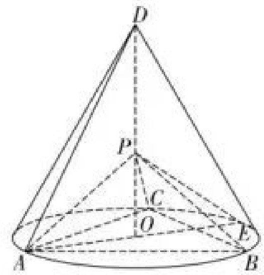
由△>0 得，$-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$,显然 $k = -1 - \sqrt{3}$ 不满足条件，$k = -1 + \sqrt{3}$ 满足条件.

页 2

15.答案：$\frac{\sqrt{6}}{6}$ 解析：不妨设 $AE=AD=1$, 则 $BA=\frac{\sqrt{3}}{2}$， $PO=\lambda DO=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$，

$PA^2=PB^2=\frac{3}{4}\lambda^2+\frac{1}{4}$.因为 $PA\perp$ 平面 PBC， $PB\subset$ 平面 PBC,所以 $PA\perp PB$.

在 ΔPAB 中，由勾股定理有 $PA^2+PB^2=BA^2$, 即 $2(\frac{3}{4}\lambda^2+\frac{1}{4})=\frac{3}{4}$, 解得 $\lambda=\frac{\sqrt{6}}{6}$.



16.答案：-6 解析：由 $f(x)=x^2$ 得，$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2}{2x_n}=\frac{1}{2}x_n$.因为 $a_1=1$，故 $x_1=2$，所以 $x_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

故 $a_n=-n+2$，故 $a_8=-6$.

三、解答题。来源：高三答案公众号

17.解析：（1）由已知 $S_n=n^2+n$，

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$，…………………3 分

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2$ 满足上式，故 $a_n=S_n-S_{n-1}=2n$ ………………5 分

（2）由（1）知：$a_1=2, a_2=4$.

于是 $b_1=a_1=2$，$b_2=\frac{a_1a_2}{2}=4$，则其公比 $q=2$，$b_n=2^n$………………7 分

因此 $\frac{1}{S_n}+b_n=\frac{1}{n(n+1)}+2^n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+2^n$………………9 分

故 $T_n=1-\frac{1}{n+1}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-\frac{1}{n+1}-1$………………12 分

18.解析：（1）使用分层抽样方法，则女性观众应该抽取 $5\times\frac{18}{45}=2$ 名……….3 分

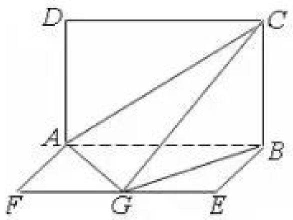
（2）上述抽取的 5 名观众中，有 3 名男性，2 名女性.设 3 名男性是 a,b,c, 2 名女性是 d,e, 则任取 2 名参加座谈会的情况有 $(a,b),(a,c),(b,c),(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e),(d,e)$, 基本事件总数是 10, 有 1 名男性观众的基本事件数是 6, 故恰有 1 名男性观众的概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. …………7 分

（3）根据列联表，K^2 的观测值 $\kappa=\frac{100(40\times27-18\times15)^2}{58\times42\times55\times45}\approx10.88$ …………10 分

由于 $10.88>6.635$，所以有 99%的把握认为性别与喜爱节目的类型有关………………12 分

19.解析：（1）$\because$ 四边形 ABCD 是正方形，$\therefore AB\perp BC$.

$\because$ 平面 ABCD⊥平面 ABEF，$AB\perp BC$，$\therefore BC\perp$ 平面 $ABEF$ …………2 分



$\because AG, BG \subset$ 平面 $ABEF$，$\therefore BC \perp AG, BC \perp BG$.

又 $AF = \frac{1}{2}AB$，G 是 EF 的中点，由条件知，$AG = BG = \sqrt{2}$.

$\therefore AG^2 + BG^2 = AB^2$，$\therefore AG \perp BG$ …………4 分

又CB⋂BG=B，∴AG⊥平面 BGC，$AG \subset$ 平面 AGC，

∴平面 AGC⊥平面 BGC. …………6 分

（2）作 $AO \perp$ 平面 BCG 垂足为 O，连接 OC，

则 $\angle ACO$ 为直线 AC 与平面 BCG 所成角

由（1）知，$BC \perp$ 平面 $ABEF$.

故三棱锥 $C-AGB$ 的体积为：

$$V_{C-ABG} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABG} \cdot BC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times 4 = \frac{16}{3}$$ …………8 分

当 $m=1$ 时，$BG = \sqrt{5}$，

ΔBCG 的面积为 $S_{\Delta BCG} = \frac{1}{2}BG \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \times 4 = 2\sqrt{5}$

三棱锥 $C-BCG$ 的体积为：$V_{A-BCG} = \frac{1}{3}S_{\Delta BCG} \cdot AO = \frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot AO$

因为 $V_{A-BCG} = V_{C-ABG}$，所以 $\frac{2\sqrt{5}}{3} \cdot AO = \frac{16}{3}$，

故 $AO = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ …………10 分

在 ΔAOC 中，$AC = 4\sqrt{2}$，所以 $\sin\angle ACO = \frac{AO}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

可得 $\cos\angle ACO = \frac{\sqrt{15}}{5}$。

故直线 AC 与平面 BCG 所成角的余弦值 $\frac{\sqrt{15}}{5}$。 …………12 分

20.**解析：**（1）由已知 $OA \perp PA, OB \perp PB$，故 O, A, P, B 在以 OP 为直径圆上，

可求该圆方程为：$x^2 + y^2 - x_0x - y_0y = 0$ ①…………3 分

又已知圆 O 的方程为：$x^2 + y^2 = 2$ ②

②-①得，两圆公共弦 AB 的方程为：$x_0x + y_0y = 2$。

故直线 AB 的方程为 $x_0x + y_0y = 2$ …………5 分

（2）由（1）知直线 AB 的方程为 $x_0x + y_0y = 2$，

令 $y=0$, 得 $x=\dfrac{2}{x_0}$； $x=0$, $y=\dfrac{2}{y_0}$，

$\therefore M\left(\dfrac{2}{x_0}, 0\right)$，$N\left(0, \dfrac{2}{y_0}\right)$，$\therefore S_{\triangle MON}=\dfrac{2}{|x_0y_0|}$…………7 分

因为 $1=\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{2}\ge 2\times\dfrac{|x_0y_0|}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|x_0y_0|$. 故 $|x_0y_0|\le\sqrt{2}$…………10 分

当且仅当 $\dfrac{x_0^2}{4}=\dfrac{y_0^2}{2}=\dfrac{1}{2}$, 即 $x_0=\pm\sqrt{2}, y_0=\pm1$ 时取等号。

此时 $P\left(\sqrt{2},\pm1\right)$ 或 $P\left(-\sqrt{2},\pm1\right)$ 来源：高三答案公众号

$\therefore S_{\triangle MON}=\dfrac{2}{|x_0y_0|}\ge\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$S_{\triangle MON}$ 取最小值 $\sqrt{2}$…………12 分

21. 解析：（1）当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x-\cos x, f'(x)=e^x+\sin x$.…………2 分

因为 $x>0$, 所以 $e^x>1, -1\le\sin x\le1$，因此 $f'(x)=e^x+\sin x>0$,

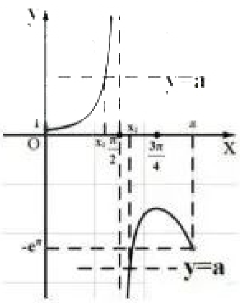
故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增…………4 分

(2) $f'(x)=e^x-a\sin x, f''(x)=e^x-a\cos x$.

由 $f''(x)=e^x-a\cos x=0$ 得，$a\cos x=e^x$. 显然 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 不是 $f''(x)=0$ 的根.

当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 时，$a=\dfrac{e^x}{\cos x}$.

令 $g(x)=\dfrac{e^x}{\cos x}$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{\cos^2 x}$.



由 $g'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{3\pi}{4}$. 当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{4}$ 或 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$g'(x)>0$；当 $\dfrac{3\pi}{4}<x<\pi$ 时，$g'(x)<0$，

且 $g(0)=1, g(\pi)=-e^{\pi}$. 所以极大值是 $g(\dfrac{3\pi}{4})=-\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$…………8 分

由右图知，当 $a>1$ 或 $a\le-e^{\pi}$ 时，直线 $y=a$ 与曲线 $y=g(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})\cup(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 内有唯一交点 (x_1,a) 或

(x_2,a)，且在 $x<x_1$ 附近，$a>\dfrac{e^x}{\cos x}$，则 $f''(x)=e^x-a\cos x<0$；在 $x>x_1$ 附近，$a<\dfrac{e^x}{\cos x}$，则

$f''(x)=e^x-a\cos x>0$. 因此 x_1 是 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内唯一极小值点.

同理可得，x_2 是 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内唯一极大值点.

故 a 的取值范围是 $\left(-\infty,-e^{\pi}\right]\cup(1,+\infty)$.…………12 分

5

请考生在第 22、23 题中任选一题做答.

22．解析：（1）因为 $\rho^2=x^2+y^2,\rho\sin\theta=y$

由已知 C 的极坐标方程为 $\rho^2\left(\sin^2\theta+3\right)=12$，

所以 $3x^2+4y^2=12$，即 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$…………2 分

所以 F_1（-1，0）、F_2（1，0）.来源：高三答案公众号

而直线 PF_2 的斜率 $k=-\sqrt{3}$，于是经过点 F_1 垂直于直线 PF_2 的直线 l 的斜率 $k'=\frac{\sqrt{3}}{3}$，直线 l 的倾斜角是 30°，

因此直线 l 的参数方程是 $\begin{cases}x=-1+t\cos30^\circ\\y=t\sin30^\circ\end{cases}$（$t$ 为参数），

即 $\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}t\\y=\frac{1}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）…………5 分

（2）设直线 l 的倾斜角是 $\alpha(0\le\alpha<\pi)$，

故其参数方程为 $\begin{cases}x=-1+t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数）

由与 $3x^2+4y^2=12$ 联立化简得：

$\left(3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha\right)t^2-6\cos\alpha t-9=0$…………8 分

设上方程两实数根分别为 t_1,t_2，则 $t_1t_2=-\frac{9}{3\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}=-\frac{9}{3+\sin^2\alpha}$

由参数的几何意义可知：$|AF_1||BF_1|=|t_1t_2|=\frac{9}{3+\sin^2\alpha}$。

因为 $0\le\alpha<\pi$，所以 $|AF_1||BF_1|\in\left[\frac{9}{4},3\right]$…………10 分

23．解析：（1）当 $a=6$ 时, $f(x)=4x+|x-6|=\begin{cases}5x-6 & (x\ge6)\\3x+6 & (x<6).\end{cases}$

直线 $4x-y+8=0$ 与 $y=3x+6$ 交于点 $A(-2,0)$,与 $y=5x-6$ 交于点 $B(14,64)$…………2 分

因此 $|AB|=\sqrt{16^2+64^2}=16\sqrt{17}$,

点 $C(6,24)$ 到直线 $4x-y+8=0$ 的距离是 $\frac{|4\times6-24+8|}{\sqrt{17}}=\frac{8}{\sqrt{17}}$.

故曲线 $f(x)$ 与直线 $4x-y+8=0$ 围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times16\sqrt{17}\times\frac{8}{\sqrt{17}}=64.$…………5 分

页 6

(2)当 $x \geq a$ 时，$f(x)<2$ 是 $5x-a<2, x<\frac{a+2}{5}$. 所以 $a \leq x<\frac{a+2}{5}$.

当 $x<a$ 时，$f(x)<2$ 是 $3x+a<2, x<\frac{2-a}{3}$ ....7 分

由 $a<0$ 可知 $x<a$ 与 $x<\frac{2-a}{3}$ 的公共部分是 $x<a$.

于是 $f(x)<2$ 的解集是 $(-\infty, \frac{a+2}{5})$.

由已知 $f(x)<2$ 的解集是 $(-\infty,-3)$.

故 $\frac{a+2}{5}=-3$，解得 $a=-17$。

所以 a 的值为 -17 ....10 分