重庆南开中学 2020-2021 学年第二学期高 2023 级期末考试

数学试题答案

一、选择题

AACD　CCCB

二、多选题

9. ACD　10. ACD　11. BCD　12. BC

三、填空题

13. 5　14. $\frac{3}{2}$　15. $\frac{\sqrt{6}}{6}$　16. $\frac{1}{4}$，$\frac{4}{7}$.

四、解答题

17、【解】(1) 如图所示，取 AB 中点 H，连 HD，HG，则有：$HG \parallel AB_1 \parallel DC_1 \parallel EF$，

所以$\begin{cases} HG \parallel EF \\ HG \not\subset 面BEF \\ EF \subseteq 面BEF \end{cases} \Rightarrow HG \parallel 面BEF$ ……①

同理有$\begin{cases} HD \parallel BE \\ HD \not\subset 面BEF \\ BE \subseteq 面BEF \end{cases} \Rightarrow HD \parallel 面BEF$ ……②

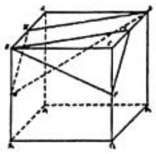
由①②，且 $HD \cap HG = H$，所以面$HDG \parallel$面BEF，所以 $DG \parallel$面BEF。

(2) 因为 $HG \parallel EF$，所以 $\angle DGH$ 即为所求角。

在 $\triangle DHG$ 中：$DH=\sqrt{5}, HG=\sqrt{2}, DG=\sqrt{BD^2+BG^2}=3$，

所以 $\cos\angle DGH = \frac{GD^2+GH^2-HD^2}{2GD \cdot GH} = \frac{9+2-5}{2\times 3\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

所以，异面直线 DG 与 EF 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。



18、【解】以 A 为坐标原点，以 CA 方向为 x 轴正方向，以 AB 方向为 y 轴正方向建立坐标系。

$\because CA=1$，$CB=3, \therefore A(0,0), B(0,2\sqrt{2}), C(-1,0)$

(1) ∵D 为 AB 中点，∴E 为 CB 中点。$\therefore A(0,0), D(0,\sqrt{2}), C(-1,0), E(-\frac{1}{2},\sqrt{2}) \therefore \overrightarrow{CD}=(1,\sqrt{2}), \overrightarrow{AE}=(-\frac{1}{2},\sqrt{2})$

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=1\cdot(-\frac{1}{2})+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\frac{3}{2}$

（2）$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=(1,0)+\lambda(0,2\sqrt{2})=(1,2\sqrt{2}\lambda)$. $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(0,2\sqrt{2})+\lambda(-1,-2\sqrt{2})=(-\lambda,2\sqrt{2}(1-\lambda))$

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=(-\lambda,2\sqrt{2}(1-\lambda))\cdot(1,2\sqrt{2}\lambda)=-\lambda+8\lambda-8\lambda^2=7\lambda-8\lambda^2=0$

$\therefore \lambda=0$或者$\lambda=\frac{7}{8}$时$\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{CD}$.

19、【解】(*) 由题意知：取底面中心O，则有$PO\perp$面$ABCD$，所以$\angle PAO$即为PA与底面ABC所成角，

不妨设$AO=2$，则有$PO=\sqrt{2}$，$PA=\sqrt{6}$，在正$\triangle ABC$中：因为$AO=2$，所以$AC=2\sqrt{3}$。

在$\triangle PAB$中：因为$PA^2+PB^2=AB^2$，所以$PA\perp PB$……①

又因为正三棱锥，所以$PA\perp PC$……②

所以，$\begin{cases}PA\perp PB\\ PA\perp PC\\ PB\cap PC=P\end{cases}\Rightarrow PA\perp$面$PBC$。

（2）因为$\triangle ABC$为等边三角形，取BC中点D，则$AD\perp BC$，作$l\parallel PO$，则$l\perp$面ABC。

以D为原点，DB,DE,l分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系。

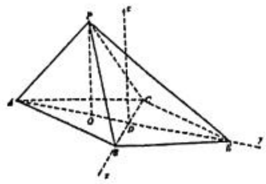
则有：$D(0,0,0),B(\sqrt{3},0,0),P(0,-1,\sqrt{2}),A(0,-3,0),C(-\sqrt{3},0,0),O(0,-1,0)$，

所以$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AO}=(0,6,0)$，所以$E(0,3,0)$。

因为$PB\perp$面PAC，所以$\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{2})$为面$PAC$的法向量。

设面PCE的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，所以由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(3\sqrt{2},-\sqrt{6},-4\sqrt{3})$。

所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{6}+4\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。所以二面角的大小为$\frac{3}{4}\pi$。



（2）法2：由（1）知，PA,PB,PC两两垂直，

所以P为原点，PB,PA,PC分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系。

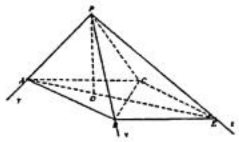
则有：$P(0,0,0),A(0,\sqrt{6},0),B(\sqrt{6},0,0),C(0,0,\sqrt{6})$，因为$O$为$\triangle ABC$的中心，所以$O(\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3})$，

所以$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AO}=(\sqrt{6},-\sqrt{6},\sqrt{6})$，所以$E(\sqrt{6},-\sqrt{6},\sqrt{6})$。

因为$PB\perp$面PAC，所以$\overrightarrow{n_1}=(1,0,0)$为面$PAC$的法向量。

设面PCE的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，所以由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{n_2}=(1,1,0)$。

所以$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。所以二面角的大小为$\frac{3}{4}\pi$。



20、【解】(1) $\because\overrightarrow{EF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\therefore EF=\frac{3}{4}BA=60$米，$BE=\frac{1}{4}BC=\frac{25}{2}$米。

在$\triangle ABC$中：$\cos B=\frac{BC^2+BA^2-AC^2}{2BC\cdot BA}=\frac{1}{2}\Rightarrow B=\frac{\pi}{3}$，

在$\triangle BDE$中：$ED=BE\cdot\sin B=\frac{25}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25}{4}\sqrt{3}$，所以$S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}ED\cdot EF=\frac{375}{2}\sqrt{3}$。

(2) 设$\angle QMN=\alpha$，则$MN=\frac{30}{\cos\alpha}$。在$\triangle MNK$中：$\angle PMK=\frac{\pi}{2}-\alpha,\angle MKP=\frac{\pi}{2}-P+\alpha$。

所以$\frac{MK}{\sin P}=\frac{MP}{\sin(\frac{\pi}{2}-P+\alpha)}\Rightarrow MK=\frac{30\sin P}{\cos(P-\alpha)}$，所以$S_{\triangle MNK}=\frac{1}{2}MN\cdot MK=\frac{360}{\cos\alpha\cdot\cos(P-\alpha)}$，

其中$\cos\alpha\cdot\cos(P-\alpha)=\frac{1}{2}[\cos P+\cos(2\alpha-P)]\le\frac{1}{2}(\frac{3}{5}+1)=\frac{4}{5}$，所以$S\ge\frac{360}{\frac{4}{5}}=450$。

当$\alpha=\frac{P}{2}$时取得最小值450平方米。

21、【解】(1) 取B_1C_1中点D，由于ΔABC是正三角形，所以$A_1D\perp B_1C_1$

又因为BCC_1B_1为矩形，而三棱柱中$AA_1//BB_1$，所以$A_1A\perp B_1C_1$

从而$B_1C_1\perp$面AA_1D，则$B_1C_1\perp AD$，所以$AB_1=AC_1$

(2) 面$ABC\perp$面AB_1C_1，$AD_1\perp$面$A_1B_1C_1$，设$AD_1=t$

如图，以 D 为原点，DC_1 为 x 轴正方向，DA_1 为 y 轴正方向，DA 为 z 轴正方向建立空间直角坐标系，

则 $A_1(0,\sqrt{3},0),B_1(-1,0,0),C_1(1,0,0),A(0,0,t),P(0,-\sqrt{3},t)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-1,0,-t)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=(-1,-\sqrt{3},0)$

面 AB_1C_1 法向量即为 $DA_1=(0,\sqrt{3},0)$，设面 AA_1B_1 法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\end{cases}\Rightarrow\vec{m}=(-\sqrt{3},1,\dfrac{\sqrt{3}}{t})$ 所以所给二面角余弦为 $\dfrac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4+\frac{3}{t^2}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $t=\sqrt{3}$

此时 $PB_1=(-1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$ 面 AA_1B_1 法向量为 $\vec{m}=(-\sqrt{3},1,1)$，所求角 θ 的正弦值为：

$\sin\theta=|\dfrac{\overrightarrow{PB_1}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{PB_1}|\cdot|\vec{m}|}|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{105}}{35}$，所以，所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{105}}{35}$。

22.【解】取 BD 中点 O，由于 $AB=AD,PB=PD$，所以 $AO\perp BD,PO\perp BD$

所以 $BD\perp$ 面 AOP，$\therefore BD\perp AP$

（1）$\because BC=CD\therefore CO\perp BD$ 则 APCO 形成 BD 的垂直平面，$\angle AOC$ 即为二面角 θ

由于 $PA=PB=PD,OA=OB=OD$ 所以 $\angle POA=\angle POD=90^\circ$，$\angle POC=\theta-90^\circ$，

由 $PD=PC$，得 $PO^2+1=PO^2+2^2-2\cdot2\cdot PO\cdot\cos(\theta-90^\circ)$

求得 $PO=\dfrac{3}{4\sin\theta}$

而四面体 $A-BCD$ 体积 $V_1=\dfrac{1}{3}S_{AOC}\cdot BD=\dfrac{2}{3}\sin\theta$

$P-ABD,P-BCD$ 拼成的多面体体积 $V_2=\dfrac{1}{3}S_{AOCP}\ BD=\dfrac{2}{3}(\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot PO+\dfrac{1}{2}PO\cdot CO\cdot\sin(\theta-90^\circ))$

带入化简得 $V_2=\dfrac{1-2\cos\theta}{4\sin\theta}=\dfrac{3}{2}V_1=\sin\theta$

则 $1-2\cos\theta=4(1-\cos^2\theta)$，解得 $\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{13}}{4}$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》