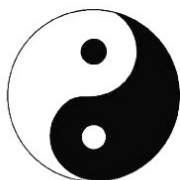


绵阳中学高 2023 届高三上学期 12 月阶段性考试

理科数学

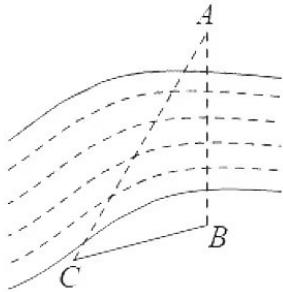
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $P = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $Q = \{x | -1 < x < 2\}$ ，则 $P \cap Q =$ ()
A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 已知 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 < 0$ ， $q: \forall x \in \mathbf{R}, x+1 > 0$ ，则下列命题是真命题的是 ()
A. $p \vee q$ B. $p \wedge q$
C. $\neg p \wedge q$ D. $\neg p \wedge \neg q$
3. 在发生某公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续 10 天，每天新增疑似病例不超过 7 人”。根据过去 10 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据，一定符合该标志的是
A. 甲地：总体均值为 3，中位数为 4 B. 乙地：总体均值为 1，总体方差大于 0
C. 丙地：中位数为 2，众数为 3 D. 丁地：总体均值为 2，总体方差为 3
4. 如图所示的图形来自中国古代的太极图，白色小圆和黑色小圆的圆心分别为 A ， B 。过点 A 作与 AB 垂直的弦与大圆交于 C ， D 两点，则 $\triangle BCD$ 的面积与圆的面积之比为 ()



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$
 - C. $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ D. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$
5. 在下列条件中，使 M 与 A ， B ， C 一定共面的是 ()
A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ B. $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}$
C. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ D. $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$
 6. 为了在一条河上建一座桥，施工前在河两岸打上两个桥位桩 A ， B (如图)，要测量 A ， B 两点的距离，

测量人员在岸边定出基线 BC ，测得 $BC = 50\text{m}$ ， $\angle ABC = 105^\circ$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ ，就可以计算出 A ， B 两点的距离为（ ）。



- A. 20 m B. 25 m C. 40 m D. $50\sqrt{2}$ m

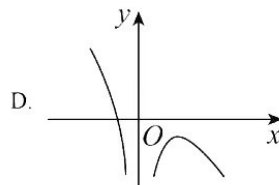
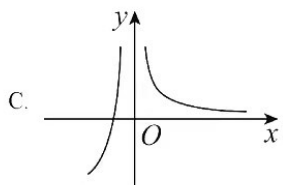
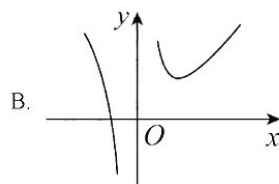
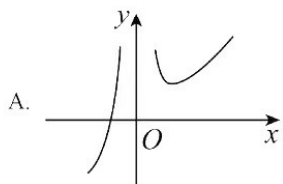
7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 F ， G 分别是棱 AB ， CC_1 的中点，则直线 FG 与平面 A_1ACC_1 所成角的正弦值等于（ ）

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

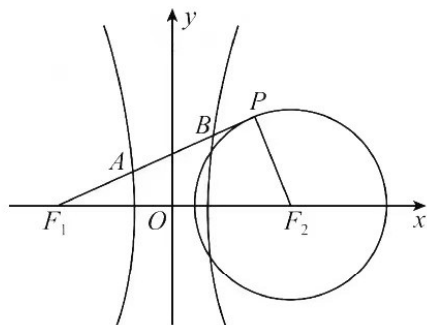
8. 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 6x = 0$ ，过点 $(1, 2)$ 的直线 $l_1, l_2, \dots, l_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 被该圆 M 截得的弦长依次为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列，则 n 的最大值是（ ）

- A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

9. 已知函数 $f(x) = 3x - \ln|x|$ ，则 $f(x)$ 的图象大致为（ ）



10. 如图, $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 分别为双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左、右焦点, 过点 F_1 作直线 l , 使直线 l 与圆 $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ 相切于点 P , 设直线 l 交双曲线 Γ 的左右两支分别于 A, B 两点 (A, B 位于线段 F_1P 上), 若 $|F_1A| : |AB| : |BP| = 2 : 2 : 1$, 则双曲线 Γ 的离心率为 ()



- A. 5 B. $\frac{\sqrt{265}}{5}$ C. $2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{6} + \sqrt{3}$

11. 已知 $a > 1$, x_1, x_2, x_3 为函数 $f(x) = a^x - x^2$ 的零点, $x_1 < x_2 < x_3$, 若 $x_1 + x_3 = 2x_2$, 则 ()

- A. $\frac{x_3}{x_2} < 2\ln a$ B. $\frac{x_3}{x_2} = 2\ln a$
C. $\frac{x_3}{x_2} > 2\ln a$ D. $\frac{x_3}{x_2}$ 与 $2\ln a$ 大小关系不确定

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x + 2}{2} & (x \leq 1) \\ |\ln(x-1)| & (x > 1) \end{cases}$, 若 $F(x) = f^2(x) - af'(x) + \frac{2}{3}$ 的零点个数为 4, 则实数 a 取值范围 ()

- A. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right] \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{7}{3}\right)$
C. $\left[\frac{5}{3}, 2\right)$ D. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right) \cup (2, +\infty)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 小小的火柴棒可以拼成几何图形, 也可以拼成数字. 如下图所示, 我们可以用火柴棒拼出 1 至 9 这 9 个数字比如: “1”需要 2 根火柴棒, “7”需要 3 根火柴棒. 若用 8 根火柴棒以适当的方式全部放入右面的表格中



(没有放入火柴棒的空位表示数字“0”), 那么最多可以表示无重复数字的三位数有 _____ 个

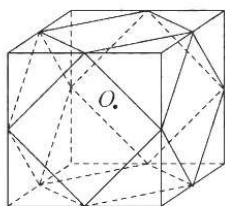
123456789

14. 若实数 a, b 满足 $\begin{cases} a+b-2 \geq 0 \\ b-a-1 \leq 0 \\ a \leq 1 \end{cases}$, 则 $\frac{b^2-3ab}{a^2}$ 的取值范围是_____.

15. 如图所示, 墙上挂有边长为 a 的正方形木板, 它的四个角的阴影部分都是以正方形的顶点为圆心, 半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆弧. 某人向此板投镖, 假设每次都能击中木板, 且击中木板上每个点的可能性都相等, 此人投镖 4000 次, 镖击中空白部分的次数是 854 次. 据此估算: 圆周率 π 约为_____.



16. 如图为某公园供游人休息的石凳, 它可以看做是一个正方体截去八个一样的四面体得到的, 它的表面是由正三角形和正方形组成. 设被截正方体的棱长为 $2a$, 若球 O 以该几何体的中心为球心, 且与正三角形表面相切, 则该球被其中一个正方形表面截得的截面面积为_____.



三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $4a_n = 3a_{n-1} + a_{n-1}$ ($n \geq 3$).

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

- (2) 设 $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_n = \frac{1}{n(5-a_{n-1})(5-a_n)}$ ($n > 2$), 求证: $\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{i} > 3$.

18. 某公司生产一种消毒液, 为测试消杀效果, 测试车间用该消毒液对 8 个染菌不锈钢载片进行测试: 第一轮测试, 逐一对着 8 个载片进行消杀检测, 若检测出不超过 1 个载片没有消杀效果, 则该消毒液合格, 测

试结束；否则，10 分钟后对没有产生消杀效果的载片进行第二轮测试，如果第二轮被测试的载片都产生消杀效果，则消毒液合格，否则需要对该消毒成分进行改良，假设每个染菌载片是否产生消杀效果相互独立，每次消杀检测互不影响，且每次消杀检测每一个染菌片产生效果的概率为 p ($0 < p < 1$)。

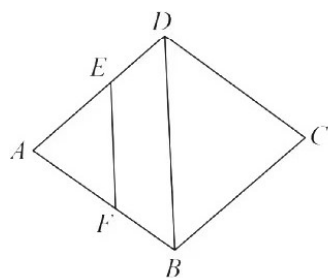
(1) 求经过第一轮测试该消毒液即合格的概率；

(2) 每进行一次载片测试视为一次检测，设检测次数 ξ 的数学期望为 $E(\xi)$ ，求证： $8 < E(\xi) < 16 - 8p$ 。

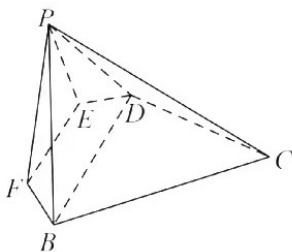
19. 如图 (1)，菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ，动点 E, F 分别在边 AD, AB 上（不含端点），且

$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{DB}$ ($0 < \lambda < 1$)，沿 EF 将 $\triangle AEF$ 向上折起得到 $\triangle PEF$ ，使得平面 $PEF \perp$ 平面 $BCDEF$ ，如图

(2) 所示。



图(1)



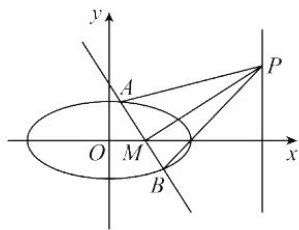
图(2)

(1) 当 λ 为何值时， $BF \perp PD$ ；

(2) 若直线 PC 与平面 $BCDEF$ 所成角的正切值为 $\frac{1}{3}$ ，求平面 PEF 和平面 PBD 夹角的大小。

20. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的右顶点为 $(2, 0)$ ，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， P 是

直线 $x = 4$ 上任一点，过点 $M(1, 0)$ 且与 PM 垂直的直线交椭圆于 A, B 两点。



(1) 求椭圆的方程；

(2) 设直线 PA, PM, PB 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 ，问：是否存在常数 λ ，使得 $k_1 + k_3 = \lambda k_2$ ？若存在，

求出 λ 的值；若不存在，说明理由。

21. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x - 2a\sqrt{x}$ 有两个极值点 x_1, x_2 .

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $x_2 \geq e^2 x_1$, 求 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 在平面直角坐标系中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$.

(1) 写出直线 l 的直角坐标方程以及曲线 C 的极坐标方程;

(2) 若 $P(0, -1)$, 且直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 求 $\frac{|PM|^2 + |PN|^2}{(|PM| \cdot |PN|)^2}$ 的值.

[选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

23. 已知函数 $f(x) = |x| + |x - 2|$.

(1) 求关于 x 的不等式 $f(x) < 3$ 的解集;

(2) 如果关于 x 的不等式 $f(x) < a$ 的解集不是空集, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线