巴中市高2023届一诊考试理科数学参考答案

一．选择题：本大题共12个小题，每小题5分，共60分．

DCBA　BDAC　DABA

二．填空题：本大题共4个小题，每小题5分，共20分．

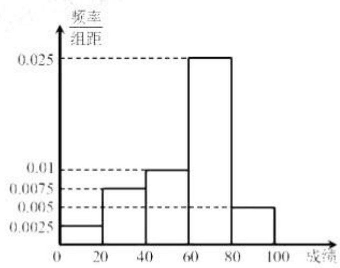
13．$\underline{x=-1}$．　14．$\underline{15}$．　15．$\underline{14\pi}$．　16．$\underline{[5-3\sqrt{2},5+3\sqrt{2}]}$．

三．解答题：本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．17—21题为必考题，每个试题考生都要作答．22、23为选考题，考生按要求作答．

（一）必考题：共60分

17．（本小题满分12分）

某中学为了解高中数学学习中抽象思维与性别的关系，随机抽取了男生120人，女生80人进行测试．根据测试成绩按$[0,20)$，$[20,40)$，$[40,60)$，$[60,80)$，$[80,100]$分组得到右图所示的频率分布直方图，并且男生的测试成绩不小于60分的有80人．



（1）填写下面的2×2列联表，判断是否有95%的把握认为高中数学学习中抽象思维与性别有关；

	成绩小于60	成绩不小于60	合计
男			
女			
合计			

（2）规定成绩不小于60（百分制）为及格，按及格和不及格用分层抽样随机抽取10名学生进行座谈，再在这10名学生中选2名学生发言，设及格学生发言的人数为X，求X的分布列和期望．

附：

$$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2\geqslant k)$	0.10	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

解：（1）成绩小于60分的人数为：$200\times[(0.0025+0.0075+0.01)\times20]=200\times0.4=80$ …………1分

由题意，得2×2列联表如下表：……………………3分

	成绩小于60	成绩不小于60	合计
男	40	80	120
女	40	40	80
合计	80	120	200

$\therefore\ K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200\times(40\times40-40\times80)^2}{80\times120\times80\times120}=\dfrac{50}{9}>5>3.841$ …………5分

故　有95%的把握认为高中数学学习中抽象思维与性别有关……………………6分

（2）由（1）知，200人中不及格的人数为80，及格人数为120

$\therefore$　用分层抽样随机抽取的10名学生中不及格有4人，及格有6人……………………7分

由题意，X的所有可能取值为0，1，2，且X服从超几何分布

$P(X=k)=\dfrac{C_6^kC_4^{2-k}}{C_{10}^2}$　$(k=0,1,2)$，即：……………………8分

$P(X=0)=\frac{C_6^0C_4^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{15}$，$P(X=1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_6^2C_4^0}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$ ……………………10 分

∴ X 的分布列为……………………………………11 分

X	0	1	2
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{3}$

$EX=0\times\frac{2}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{3}=\frac{6}{5}$． ……………………………………12 分

18．（本小题满分 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$．

（1）证明：数列 $\{a_n+1\}$ 是等比数列；

（2）设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，证明：$S_n<2$．

解：（1）由 $a_{n+1}=2a_n+1$ 得：$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ ……………………………2 分

由 $a_1=1$ 知：$a_1+1=2$

∴ $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$ ……………………………………4 分

∴ 数列 $\{a_n+1\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列……………………5 分

（2）**方法一**

由（1）得：$a_n+1=2^n$ ……………………………………6 分

∴ $a_n=2^n-1\geqslant 2^{n-1}$，当且仅当 $n=1$ 时取等号……………………8 分

∴ $b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^n-1}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$ ……………………………………9 分

∴ $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{2}{2^n}<2$

即 $S_n<2$． ……………………………………12 分

方法二

由（1）得：$a_n+1=2^n$

∴ $a_n=2^n-1$ ……………………………………6 分

∴ $a_2=3>2\times1$，$a_3=7>3\times2$，$a_4=15>4\times3$ ……………………………7 分

当 $n\geqslant5$ 时，恒有 $2^n=(1+1)^n>1+C_n^2+C_n^{n-2}=n(n-1)+1$，故 $2^n-1>n(n-1)>0$ ………8 分

∴ 对任意 $n\geqslant2$ 时，恒有 $2^n-1>n(n-1)>0$

∴ 当 $n\geqslant2$ 时，恒有 $b_n=\frac{1}{a_n}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$ ……………………………10 分

∴ $S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\leqslant 1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=2-\frac{1}{n}<2$

即 $S_n<2$． ……………………………………12 分

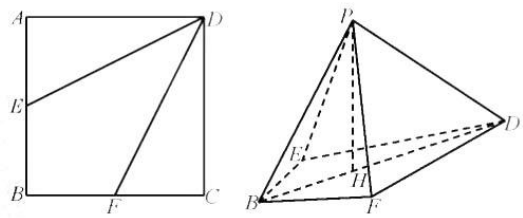
说明：也可用数学归纳法证明：$2^n-1\geqslant2^{n-1}$ 与 $2^n-1>n(n-1)$．

19．（本小题满分 12 分）

如图，正方形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 AB，BC 的中点，将 $\triangle AED$，$\triangle DCF$ 分别沿 DE，DF 折起，使 A，C 两点重合于点 P，过 P 作 $PH\perp BD$，垂足为 H．

（1）证明：$PH\perp$ 平面 $BFDE$；

（2）求 PB 与平面 PED 所成角的正弦值．



解：（1）证明：

方法一

在正方形 $ABCD$ 中，有 $AC \perp BD$，由已知得 $EF // AC$

∴ $EF \perp BD$ ……………………………………………………………………1 分

由折叠的性质知：$PD \perp PE$，$PD \perp PF$，$PE \cap PF = P$

∴ $PD \perp$ 平面 PEF ……………………………………………………………2 分

又 $EF \subset$ 平面 PEF

∴ $PD \perp EF$ ……………………………………………………………………3 分

∵ $PD \cap BD = D$

∴ $EF \perp$ 平面 PBD ……………………………………………………………4 分

∵ $PH \subset$ 平面 PBD

∴ $EF \perp PH$ ……………………………………………………………………5 分

∵ $PH \perp BD$，EF、$BD \subset$ 平面 $BFDE$，且 EF 与 BD 相交

∴ $PH \perp$ 平面 $BFDE$ ……………………………………………………………6 分

方法二

在正方形 $ABCD$ 中，有 $AC \perp BD$，由已知得 $EF // AC$

∴ $EF \perp BD$ ……………………………………………………………………1 分

由折叠的性质知：$PD \perp PE$，$PD \perp PF$，$PE \cap PF = P$

∴ $PD \perp$ 平面 PEF ……………………………………………………………2 分

又 $EF \subset$ 平面 PEF，故 $PD \perp EF$ ……………………………………………3 分

∵ $PD \cap BD = D$

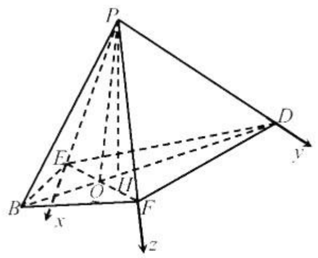
∴ $EF \perp$ 平面 PBD ……………………………………………………………4 分

又 $EF \subset$ 平面 $BFDE$，故平面 $BFDE \perp$ 平面 PBD ………………………5 分

∵ $PH \subset$ 平面 PBD，平面 $BFDE \cap$ 平面 $PBD=BD$，$PH \perp BD$

∴ $PH \perp$ 平面 $BFDE$ ……………………………………………………………6 分

（2）**方法一**



不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，由已知得：

$PD = 2$，$PE = PF = 1$，$EF = \sqrt{2}$

∴ $PE \perp PF$ ……………………………………7 分

故直线 PD，PE，PF 两两垂直

以 P 为原点，PD，PE，PF 所在直线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系

则 $P(0, 0, 0)$，$D(0, 2, 0)$，$E(1, 0, 0)$，$F(0, 0, 1)$

平面 PED 的一个法向量为 $\overrightarrow{PF} = (0, 0, 1)$ ……………8 分

设 $EF \cap BD = Q$，则 $Q(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$，且 $\overrightarrow{QB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ ………9 分

∴ $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + (\frac{1}{6}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}) = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ ……………………10 分

设 PB 与平面 PED 所成角为 θ，则 $\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PF} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PF}|}{|\overrightarrow{PB}| \cdot |\overrightarrow{PF}|} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ …… 11 分

∴ PB 与平面 PED 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$． ……………………………12 分

方法二

不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，设 $EF \cap BD = Q$，PB 与平面 PED 所成角为 θ

由已知得：$PD = 2$，$PE = PF = 1$，$EF = \sqrt{2}$，

∴ $PE \perp PF$，$PQ = BQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ……………………………………………7 分

又 $PD \perp PF$，故 $PF \perp$ 平面 PDE ……………………………………………8 分

∴ $\sin\theta = |\cos\langle \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PF} \rangle| = \cos\angle FPB = \frac{PB^2 + PF^2 - BF^2}{2PB \times PF} = \frac{PB}{2}$ ……………………9 分

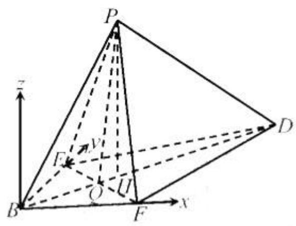
在直角△PDQ 中，$PD = 2$，$DQ = \frac{3\sqrt{2}}{2}$，$PQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $\cos\angle PQD=\frac{PQ}{DQ}=\frac{1}{3}$，故 $\cos\angle PQB=-\cos\angle PQD=-\frac{1}{3}$ ··············· 10 分

在△BPQ 中，$BP=\sqrt{BQ^2+PQ^2-2PQ\times DQ\cos\angle PQB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ··············· 11 分

∴ $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ PB 与平面 PED 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$． ·········11 分



方法三

以 B 原点，BF，BE 及过 B 平面 $BFDE$ 的垂线分别为 x，y，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系

不妨设正方形 $ABCD$ 的边长为 2，设 $EF\cap BD=Q$，PB 与平面 PED 所成角为 θ

则 $F(1,0,0)$，$E(0,1,0)$，$D(2,2,0)$，$Q(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ ··············· 7 分

由已知得：$PD=2$，$PE=PF=1$，$EF=\sqrt{2}$

∴ $PE\perp PF$ ··············· 8 分

又 $PD\perp PF$，故 $PF\perp$ 平面 PDE

∴ $\vec{FP}$ 为平面 PED 的一个法向量 ··············· 9 分

在直角△PDQ 中，$PD=2$，$DQ=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，$PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $PH=\frac{PD\times PQ}{DQ}=\frac{2}{3}$，$HQ=\frac{PQ^2}{DQ}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

∴ $BQ=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ··············· 10 分

由（1）知平面 $PH\perp BFDE$，故点 P 的坐标为 $P(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$

∴ $\overrightarrow{BP}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$，$\overrightarrow{FP}=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$ ··············· 11 分

∴ $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BP},\overrightarrow{FP}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{FP}|}{|\overrightarrow{BP}|\cdot|\overrightarrow{FP}|}=\frac{-\frac{2}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ PB 与平面 PED 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$． ··············· 12 分

20．（本小题满分 12 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，左顶点为 D，离心率为 $\frac{1}{2}$，经过 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点，△F_2AB 的周长为 8．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过直线 $x=4$ 上一点 P 作椭圆 C 的两条切线，切点分别为 M，N，求 $S_{\triangle DMN}$ 的最大值．

说明：若点 (x_0,y_0) 在椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上，则椭圆 C 在点 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$．

解：（1）由椭圆的定义及△F_2AB 的周长为 8 得：$4a=8$，解得 $a=2$ ··············· 2 分

由离心率为 $\frac{1}{2}$ 得：$1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{4}=(\frac{1}{2})^2$，化简得 $b^2=3$ ··············· 3 分

∴ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ··············· 4 分

（2）由（1）知 $D(-2,0)$，$F_2(1,0)$，设 $P(4,t)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则

以 M 为切点的椭圆 C 的切线方程为 $\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$

以 N 为切点的椭圆 C 的切线方程为 $\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$ ……5 分

又 两切线均过点 P，故 $\frac{4x_1}{4}+\frac{y_1t}{3}=1$，且 $\frac{4x_2}{4}+\frac{ty_2}{3}=1$

整理化简得 $3x_1+y_1t-3=0$，且 $3x_2+y_2t-3=0$ ……6 分

∴ 点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 均在直线 $3x+ty-3=0$ 上

∴ 直线 MN 的方程为 $3x+ty-3=0$，且直线 MN 过定点 $F_2(1,0)$ ……7 分

由 $\begin{cases}3x+ty-3=0,\\3x^2+4y^2-12=0,\end{cases}$ 消去 x 得：$(t^2+12)y^2-6ty-27=0$

于是，$\triangle=(-6t)^2-4(t^2+12)(-27)=144(t^2+9)>0$，$y_1y_2<0$

由求根公式得：$|y_1-y_2|=\frac{12\sqrt{t^2+9}}{t^2+12}$ ……8 分

方法一

设点 D 到直线 MN 的距离为 d，则 $d=\frac{9}{\sqrt{9+t^2}}$ ……9 分

∴ $S_{\triangle DMN}=\frac{1}{2}|MN|d=\frac{1}{2}\times\frac{9}{\sqrt{t^2+9}}\times\sqrt{1+\frac{t^2}{9}}|y_2-y_1|=\frac{3}{2}|y_2-y_1|=\frac{18\sqrt{t^2+9}}{t^2+12}$ ……10 分

令 $\sqrt{t^2+9}=m$，则 $S_{\triangle DMN}=\frac{18\sqrt{t^2+9}}{t^2+12}=\frac{18m}{m^2+3}$，且 $m\geqslant3$

设 $f(m)=\frac{18m}{m^2+3}$，$m\geqslant3$，则 $f'(m)=\frac{18(3-m^2)}{(3+m^2)^2}<0$ ……11 分

∴ 函数 $f(m)$ 在 $[3,+\infty)$ 是减函数，从而 $f(m)_{\max}=f(3)=\frac{9}{2}$

∴ $S_{\triangle DMN}$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$． ……12 分

方法二

$S_{\triangle DMN}=S_{\triangle DMF_2}+S_{\triangle DNF_2}=\frac{1}{2}|DF_2|(|y_1|+|y_2|)=\frac{3}{2}|y_1-y_2|=\frac{18\sqrt{t^2+9}}{t^2+12}$ ……10 分

下同方法一

方法三

由方法一知，直线 MN 的方程为 $3x+ty-3=0$，且直线 MN 过定点 $F_2(1,0)$ ……7 分

令 $s=-\frac{t}{3}$，则 MN 的方程化为：$x=sy+1$

由 $\begin{cases}x=sy+1,\\3x^2+4y^2-12=0,\end{cases}$ 消去 x 得：$(3s^2+4)y^2+6sy-9=0$

于是，$\triangle=(6s)^2-4(3s^2+4)\times(-9)=144(s^2+1)>0$，$y_1y_2<0$ ……8 分

由求根公式得：$|y_1-y_2|=\frac{12\sqrt{s^2+1}}{3s^2+4}$ ……9 分

∴ $S_{\triangle DMN}=S_{\triangle DMF_2}+S_{\triangle DNF_2}=\frac{1}{2}|DF_2|(|y_1|+|y_2|)=\frac{3}{2}|y_1-y_2|=\frac{18\sqrt{s^2+1}}{3s^2+4}$ ……10 分

下仿方法一求解，略

21．（本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=e^x-bx-2b$，$g(x)=ax^2-x-1$ $(a<0)$．

（1）当 $b=0$ 时，设 $h(x)=g(x)f(x)$，求函数 $h(x)$ 的单调区间；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1，x_2，证明 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$．

解：（1）当 $b=0$ 时，$h(x)=g(x)f(x)=(ax^2-x-1)e^x$，$h'(x)=(ax-1)(x+2)e^x$ ……1 分

又 $a<0$，故 $h'(x)=0$ 得 $x=-2$，或 $x=\frac{1}{a}$ ……2 分

①当$\frac{1}{a}=-2$，即$a=-\frac{1}{2}$时，$h'(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2e^x\leq 0$恒成立

∴ $h(x)$的减区间为$(-\infty,+\infty)$，无增区间 ……………………………………3分

②当$\frac{1}{a}<-2$，即$-\frac{1}{2}<a<0$时，

由$h'(x)<0$得：$x<\frac{1}{a}$，或$x>-2$；由$h'(x)>0$得$\frac{1}{a}<x<-2$

∴ $h(x)$的减区间为$(-\infty,\frac{1}{a})$，$(-2,+\infty)$，增区间为$(\frac{1}{a},-2)$ ……………………4分

③当$\frac{1}{a}>-2$，即$a<-\frac{1}{2}$时，

由$h'(x)<0$得$x<-2$，或$x>\frac{1}{a}$；由$h'(x)>0$得$-2<x<\frac{1}{a}$

∴ $h(x)$的减区间为$(-\infty,-2)$，$(\frac{1}{a},+\infty)$，增区间为$(-2,\frac{1}{a})$ ……………………5分

综上可得：当$a=-\frac{1}{2}$时，$h(x)$的减区间为$(-\infty,+\infty)$，无增区间；

当$-\frac{1}{2}<a<0$时，$h(x)$的减区间为$(-\infty,\frac{1}{a})$，$(-2,+\infty)$，增区间为$(\frac{1}{a},-2)$；

当$a<-\frac{1}{2}$时，$h(x)$的减区间为$(-\infty,-2)$，$(\frac{1}{a},+\infty)$，增区间为$(-2,\frac{1}{a})$ ……6分

（2）$f'(x)=e^x-b$，$x\in\mathbf{R}$

当$b\leq 0$时，$f'(x)>0$恒成立，$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数，至多一个零点，不合题意……7分

当$b>0$时，由$f'(x)=0$得$x=\ln b$，此时：

若$x<\ln b$，则$f'(x)<0$，$f(x)$是减函数；若$x>\ln b$，则$f'(x)>0$，$f(x)$是增函数

∴ $f(x)_{\min}=f(\ln b)=-b(1+\ln b)$

由函数$f(x)$有两个零点x_1，x_2得：$-b(1+\ln b)<0$，解得$b>\frac{1}{e}$

当$b>\frac{1}{e}$时，有$-2<\ln b<2b$

又 $f(-2)=e^{-2}>0$，$f(2b)=e^{2b}-2b^2-2b>1+2b+\frac{(2b)^2}{2}-2b^2-2b=1>0$

∴ 当$b>\frac{1}{e}$时，函数$f(x)$有两个零点x_1，x_2 ……………………………………8分

注：

若未说明$b>\frac{1}{e}$时$f(x)$一定有两个零点，或仅说明了在$x=\ln b$的某一侧有零点的扣1分.

方法一

设$x_1<\ln b<x_2$，则$f(x_1)=f(x_2)=0$，且$-x_2+2\ln b<\ln b$

设$F(x)=f(x)-f(-x+2\ln b)$ $(x>\ln b)$，则$F(x)=e^x-b^2e^{-x}-2bx+2b\ln b$

∴ $F'(x)=e^x+b^2e^{-x}-2b\geq 2\sqrt{e^x\cdot(b^2e^{-x})}-2b=0$

∴ $F(x)$在$(\ln b,+\infty)$上是增函数，故$F(x)>F(\ln b)=0$ ……………………………9分

∴ 当$x_2>\ln b$时，有$F(x_2)>0$，即$f(x_2)-f(-x_2+2\ln b)>0$成立

∴ $f(x_1)-f(-x_2+2\ln b)>0$，即$f(x_1)>f(-x_2+2\ln b)$ ……………………………10分

由$f(x)$在$(-\infty,\ln b)$上是减函数且x_1，$-x_2+2\ln b<\ln b$得：$x_1<-x_2+2\ln b$

∴ $\frac{x_1+x_2}{2}<\ln b$ ……………………………………………………………11分

∵ 当$b>\frac{1}{e}$时，$f'(x)=e^x-b$在$\mathbf{R}$上是增函数，且$f'(\ln b)=0$

∴ $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$. ……………………………………………………………12分

方法二

不妨设$x_1<\ln b<x_2$，又$f'(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增

要证 $f'(\frac{x_1+x_2}{2})<0$，只需证 $\frac{x_1+x_2}{2}<\ln b$ ……………………9 分

又 x_1、x_2 是 $f(x)$ 的零点，故 $f(x_1)=f(x_2)=0$

即 $e^{x_1}=b(x_1+2)$，$e^{x_2}=b(x_2+2)$

∴ $x_1=\ln b+\ln(x_1+2)$ ①，$x_2=\ln b+\ln(x_2+2)$ ②

②−① 得 $x_2-x_1=\ln(x_2+2)-\ln(x_1+2)$

∴ $\frac{(x_2+2)-(x_1+2)}{\ln(x_2+2)-\ln(x_1+2)}=1$ ……………………10 分

由对数均值不等式得：$\sqrt{(x_1+2)(x_2+2)}<\frac{(x_2+2)-(x_1+2)}{\ln(x_2+2)-\ln(x_1+2)}=1$

∴ $(x_1+2)(x_2+2)<1$ ……………………11 分

①+② 得：$\frac{x_1+x_2}{2}=\ln b+\ln\sqrt{(x_1+2)(x_2+2)}$

∴ $\frac{x_1+x_2}{2}<\ln b$． ……………………12 分

（二）选考题，共 10 分，请考生在 22，23 题中任选一题作答，如果多做，按第一题记分．

22．[选修 4—4，坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2t,\\y=1+t\end{cases}$（$t$ 为参数），以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$．

（1）求 l 的普通方程和 C 的直角坐标方程；

（2）设 $P(1,1)$，直线 l 与曲线 C 相交于 A，B 两点，求 $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}$ 的值．

解：（1）由 $\begin{cases}x=1+2t,\\y=1+t\end{cases}$ 消去 t 得 $x-1=2(y-1)$，整理得 $x-2y+1=0$

∴ l 的普通方程为 $x-2y+1=0$ ……………………2 分

由 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$ 得 $\rho^2=4\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$ ……………………3 分

代入 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$ 整理得 $x^2+y^2-4x-2y=0$

∴ C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-4x-2y=0$ ……………………5 分

（2）**方法一**

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

由 $\begin{cases}x-2y+1=0,\\x^2+y^2-4x-2y=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=\frac{9-4\sqrt{6}}{5},\\y_1=\frac{7-2\sqrt{6}}{5}.\end{cases}$，或 $\begin{cases}x_2=\frac{9+4\sqrt{6}}{5},\\y_2=\frac{7+2\sqrt{6}}{5}.\end{cases}$ ……………………7 分

∴ $|PA|=\sqrt{(x_1-1)^2+(y_1-1)^2}=\frac{2\sqrt{6}-2}{\sqrt{5}}$

$|PB|=\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-1)^2}=\frac{2\sqrt{6}+2}{\sqrt{5}}$ ……………………9 分

∴ $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}-2}+\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{6}+2}=\frac{\sqrt{30}}{5}$． ……………………10 分

方法二

点 $P(1,1)$ 在直线 l 上，设直线 l 与曲线 C 的交点 A，B 分别对应参数 t_1，t_2（$t_1<t_2$）

则 $|PA|=\sqrt{5}|t_1|$，$|PB|=\sqrt{5}|t_2|$ ……………………6 分

∴ $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|})$ ……………………7 分

代 $\begin{cases}x=1+2t,\\y=1+t\end{cases}$ 入 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 整理得：$5t^2-4t-4=0$

解得：$t_1=\frac{2-2\sqrt{6}}{5}$，$t_2=\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$ ……………………………………9 分

∴ $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{5}{2\sqrt{6}-2}+\frac{5}{2\sqrt{6}+2})=\frac{\sqrt{30}}{5}$． ……………………………………10 分

方法三

点 $P(1,1)$ 在直线 l 上，设直线 l 与曲线 C 的交点 A，B 分别对应参数 t_1，t_2

则 $|PA|=\sqrt{5}|t_1|$，$|PB|=\sqrt{5}|t_2|$ ……………………………………6 分

∴ $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|})=\frac{|t_1|+|t_2|}{\sqrt{5}|t_1t_2|}$ ……………………………………7 分

代 $\begin{cases}x=1+2t,\\y=1+t\end{cases}$ 入 $x^2+y^2-4x-2y=0$ 整理得：$5t^2-4t-4=0$

∴ $t_1+t_2=\frac{4}{5}$，$t_1t_2=-\frac{4}{5}$ ……………………………………8 分

∴ $|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{16}{5}}=\frac{4\sqrt{6}}{5}$ ……………………………………9 分

∴ $\frac{1}{|PA|}+\frac{1}{|PB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{\sqrt{5}|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{30}}{5}$． ……………………………………10 分

23．[选修4—5，不等式选讲]（10 分）

设函数 $f(x)=|x+1|+|x+3|$．

（1）求不等式 $f(x)\leqslant 4$ 的解集；

（2）若 $a>0$，$b>0$，且 $f(a)+f(b)=12$，求 $\frac{1}{a}(b+\frac{4}{b})$ 的最小值．

解：（1）**方法一**

由 $f(x)\leqslant 4$ 得 $\begin{cases}-4-2x\leqslant 4,\\x\leqslant -3.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2\leqslant 4,\\-3<x\leqslant -1.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4+2x\leqslant 4,\\x>-1.\end{cases}$ ……………………………………1 分

解 $\begin{cases}-4-2x\leqslant 4,\\x\leqslant -3.\end{cases}$ 得 $-4\leqslant x\leqslant -3$ ……………………………………2 分

解 $\begin{cases}2\leqslant 4,\\-3<x\leqslant -1.\end{cases}$ 得 $-3<x\leqslant -1$ ……………………………………3 分

解 $\begin{cases}4+2x\leqslant 4,\\x>-1.\end{cases}$ 得 $-1<x\leqslant 0$ ……………………………………4 分

∴ $f(x)\leqslant 4$ 的解集为 $[-4,0]$ ……………………………………5 分

方法二

$f(x)\leqslant 4$ 即 $|x+1|+|x+3|\leqslant 4$，其几何意义为：

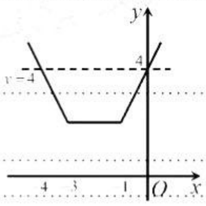
数轴上实数 x 对应的点到 -4 与 -1 所对点的距离之和小于 4 的点的集合 ……………2 分

又 $f(0)=f(-4)=4$ ……………………………………3 分

∴ $f(x)\leqslant 4$ 的解集为 $[-4,0]$ ……………………………………5 分

方法三

$f(x)=\begin{cases}-4-2x, & x\leqslant -3.\\2. & -3<x\leqslant -1.\\2x+4. & x>-1.\end{cases}$ 其图象如右图 ……………………………………3 分



又 $f(0)=f(-4)=4$ ……………………………………4 分

∴ $f(x)\leqslant 4$ 的解集为 $[-4,0]$ ……………………………………5 分

（2）**方法一**

由 $a>0$，$b>0$ 且 $f(a)+f(b)=12$ 得：$a+b=2$，$0<a<2$，$0<b<2$ ……………………………6 分

∴ $\frac{1}{a}(b+\frac{4}{b})=\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}=\frac{2-a}{a}+\frac{2(a+b)}{ab}=\frac{4}{a}+\frac{2}{b}-1$ ……………………………………7 分

∴ $\frac{4}{a}+\frac{2}{b}=(a+b)(\frac{2}{a}+\frac{1}{b})=3+\frac{2a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=3+2\sqrt{2}$ ……………………………………8 分

当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $a=2\sqrt{2}-2$，$b=4-2\sqrt{2}$ 时取等号 ……………………………9 分

$\therefore$ $\frac{1}{a}(b+\frac{4}{b})$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$． ……………………………………………………10 分

方法二

由 $a>0$，$b>0$ 且 $f(a)+f(b)=12$ 得：$a+b=2$，$0<a<2$，$0<b<2$ ……………………………6 分

$\therefore$ $\frac{1}{a}(b+\frac{4}{b})=\frac{b}{a}+\frac{4}{ab}=\frac{b}{a}+\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}+2$ ……………………………………………7 分

$\because$ $\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{2b}{a}\times\frac{a}{b}}=2\sqrt{2}$ ……………………………………………………………8 分

当且仅当 $\frac{2a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $a=2\sqrt{2}-2$，$b=4-2\sqrt{2}$ 时取等号 ……………………………9 分

$\therefore$ $\frac{1}{a}(b+\frac{4}{b})$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$． ……………………………………………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。