

保密★启用前

2021—2022 学年度第一学期期末考试

高三数学试题 (B)

本试卷共 4 页, 分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分, 共 150 分, 考试时间 120 分钟.

第 I 卷

注意事项:

1. 答第 I 卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.
2. 每题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再改涂在其它答案标号.

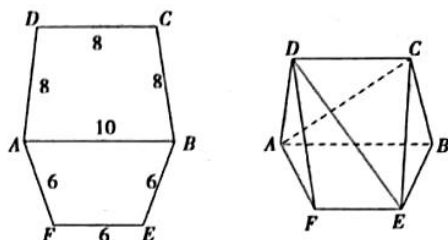
一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{x | -1 < x < 3\}$, $N = \{1, 2, 3\}$, 则 $M \cap N =$
A. $\{2, 3\}$ B. $\{2\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{1, 2, 3\}$
2. 已知 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0, \\ -x+2, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(f(2)) =$
A. 0 B. 2 C. 4 D. 6
3. 已知 $\cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin \alpha$ 的值等于
A. $-\frac{7}{9}$ B. $-\frac{2}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{7}{9}$
4. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的实轴长为 2, 则其渐近线方程为
A. $y = \pm \frac{1}{2}x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm \sqrt{2}x$
5. 若函数 $f(x) = x - a \ln x$ 的图象在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y = 3x - 2$, 则实数 $a =$
A. -1 B. 1 C. -2 D. 2
6. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 且 $f(1+x) = f(1-x)$, 若 $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2^x$, 则 $f(2022) =$
A. 0 B. 1 C. 2 D. 4
7. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $\frac{S_n}{S_{2n}}$ 为常数, 则称数列 $\{a_n\}$ 为“吉祥数列”. 已知等差数列 $\{b_n\}$ 的首项为 2, 且公差不为 0, 若数列 $\{b_n\}$ 为“吉祥数列”, 则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为
A. $b_n = 2n$ B. $b_n = n+1$ C. $b_n = 3n-1$ D. $b_n = 4n-2$

高三数学试题 (B) 第 1 页 (共 4 页)

8. 我国古代《九章算术》里记载了一个求“羡除”体积的例子，羡除，隧道也，其所穿地，上平下邪。小明仿制羡除裁剪出如图所示的纸片，在等腰梯形 $ABCD$ 中， $AB=10$ ， $BC=CD=DA=8$ ，在等腰梯形 $ABEF$ 中， $EF=6$ ， $AF=BE=6$ 。将等腰梯形 $ABCD$ 沿 AB 折起，使平面 $ABCD \perp$ 平面 $ABEF$ ，则五面体 $ABCDFE$ 中异面直线 AC 与 DE 所成角的大小为

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$



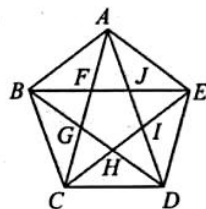
- 二、多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $a > b > 0$ ， $c > 1$ ，则下列各式成立的是

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $c^a > c^b$
C. $a^c < b^c$ D. $\frac{c-1}{b} > \frac{c-1}{a}$

10. 如图，顺次连接正五边形 $ABCDE$ 的不相邻的顶点，得到五角星形状，则以下说法正确的是

- A. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DI}$
C. $3\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AG}$ D. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AJ}$



11. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且 $C = \frac{\pi}{2}$ ，将 $\triangle ABC$ 分别绕边 a, b, c 所在的直线旋转一周，形成的几何体的体积分别记为 V_a, V_b, V_c ，侧面积分别记为 S_a, S_b, S_c ，则

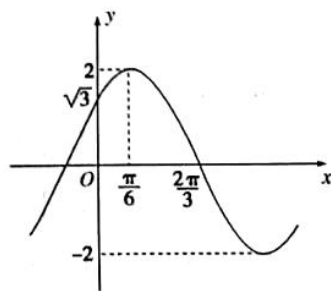
- A. $\frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2} = \frac{1}{V_c^2}$ B. $V_a + V_b < 2V_c$
C. $\frac{1}{S_a^2} + \frac{1}{S_b^2} = \frac{1}{S_c^2}$ D. $S_a + S_b \geq 2S_c$

12. 已知函数 $f(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图

所示，令 $g(x) = f(x) - f'(x)$ ，则下列说法正确的是

- A. $g(\frac{\pi}{6}) = 2$
B. 函数 $g(x)$ 图象的对称轴方程为 $x = k\pi + \frac{11\pi}{12}$ ($k \in \mathbb{Z}$)
C. 若函数 $h(x) = g(x) + 2$ 的两个不同零点分别为 x_1, x_2 ，则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$

- D. 函数 $g(x)$ 的图象上存在点 P ，使得在 P 点处的切线斜率为 -3



第 II 卷

本卷为必考题. 第 13~16 题为填空题, 第 17~22 题为解答题, 每个试题考生都必须作答.

三、填空题: 本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 不等式 $\frac{x-1}{x-3} \leq 0$ 的解集为_____.

14. 我国古代数学名著《孙子算经》载有一道数学问题: “今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩二, 七七数之剩二. 问物几何?” 这里的几何指多少的意思. 翻译成数学语言就是: 求正整数 N , 使 N 除以 3 余 2, 除以 5 余 2. 根据这一数学思想, 今有由小到大排列的所有正整数数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{a_n\}$ 满足被 3 除余 2, $a_1=2$, $\{b_n\}$ 满足被 5 除余 2, $b_1=2$, 把数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 相同的项从小到大组成一个新数列记为 $\{c_n\}$, 则 $c_n =$ _____.

15. 三棱锥 $P-ABC$ 的各顶点都在同一球面上, $PC \perp$ 底面 ABC , 若 $PC=AC=1$, $AB=\sqrt{2}$, 且 $\angle BAC=45^\circ$, 此球的表面积等于_____.

16. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 以 AB 为直径的圆过焦点 F , 线段 AB 的中点为 M , 过点 M 作抛物线 C 的准线的垂线, 垂足为 N , 则 $\frac{|MN|}{|AB|}$ 的最大值为_____.

四、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $b=5$, $(a+b)\sin A = 2b\sin B$.

(1) 证明: $a=b$;

(2) 点 D 在边 AB 上, $AD=2BD$, $CD=\sqrt{17}$, 求 $\sin \angle BCD$.

18. (12 分)

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_4=12$, $S_3=18$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n=(-1)^n a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

高三数学试题 (B) 第 3 页 (共 4 页)

19. (12分)

已知圆 C 经过两点 $A(-1,0), B(1,-2)$, 且圆心 C 在 x 轴上.

(1) 求圆的标准方程;

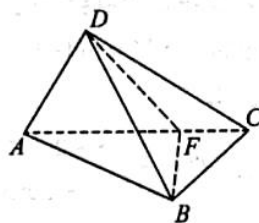
(2) 已知直线 l 与直线 AB 垂直, 且与圆 C 相交所得弦长为 $2\sqrt{3}$, 求直线 l 的方程.

20. (12分)

如图, 三棱锥 $D-ABC$ 中, $AB=CD=6$, $AD=BC=2\sqrt{3}$, $AB \perp BC$, $AD \perp DC$, $DB=\sqrt{30}$.

(1) 求证: 平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若点 F 是 AC 上的动点, 试求 CF 的长, 使得二面角 $A-DF-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$.



21. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $F(\sqrt{3}, 0)$ 是椭圆的右焦点, 点

$A(0, t)$, 直线 AF 的斜率为 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, O 为坐标原点.

(1) 求 E 的方程;

(2) 设过点 A 的直线 l 与 E 相交于 P, Q 两点, 求 $\triangle OPQ$ 的面积的最大值.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \ln x (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若对任意的 $x \in [1, +\infty)$, 都有 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ 成立, 求 a 的取值范围.

高三数学试题 (B) 第 4 页 (共 4 页)

高三数学试题（B）参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1—5 CBDCC 6—8 BDD

二、多项选择题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，

有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. BD 10. ABD 11. AD 12. AC

三、填空题：本大题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $[1, 3)$ 14. $15n-13$ 15. 3π 16. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

四、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

解：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，因为 $(a+b)\sin A = 2b\sin B$,

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$,

得 $a(a+b) = 2b^2$, 整理得 $(a+2b)(a-b) = 0$,2 分

因为 $a+2b > 0$,

所以 $a=b$;4 分

(2) 如图，取 AB 中点 E ，连接 CE ，

由 (1) 得， $\triangle ABC$ 为等腰三角形，所以 $CE \perp AB$ ，

设 $BD = x$ ，则 $AD = 2x$ ， $BE = \frac{3}{2}x$ ， $DE = \frac{1}{2}x$ ，

由勾股定理得

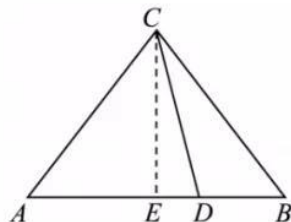
$17 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 25 - \left(\frac{3}{2}x\right)^2$,6 分

解得 $x=2$,7 分

因为 $\sin B = \frac{4}{5}$ ，在三角形 BCD 中，

由正弦定理可得 $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin B}$,9 分

得 $\sin \angle BCD = \frac{8\sqrt{17}}{85}$10 分



高三数学答案（B）第 1 页（共 6 页）



18. (12 分)

解: (1) 由题意得 $\begin{cases} a_1 + 3d = 12, \\ 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d = 18, \end{cases}$ 2 分

解得 $\begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 3, \end{cases}$ 3 分

所以 $a_n = 3 + (n-1) \times 3 = 3n$;4 分

(2) 因为 $a_n = 3n$, $b_n = (-1)^n a_n = (-1)^n 3n$,

所以 $S_n = -3 + 6 - 9 + 12 - \cdots + (-1)^n \cdot 3n$,6 分

当 n 为偶数时, $S_n = (-3+6) + (-9+12) + \cdots + [-3(n-1)+3n] = \frac{n}{2} \times 3 = \frac{3n}{2}$,

.....9 分

当 n 为奇数时, $n-1$ 为偶数,

$S_n = (-3+6) + (-9+12) + \cdots + [-3(n-2)+3(n-1)] - 3n = \frac{n-1}{2} \times 3 - 3n$

$= -\frac{3}{2}(n+1)$,11 分

所以 $S_n = \begin{cases} \frac{3n}{2}, n \text{ 为偶数}, \\ -\frac{3}{2}(n+1), n \text{ 为奇数}. \end{cases}$ 12 分

19. (12 分)

解: (1) 已知圆心 C 在 x 轴上, 故设圆的标准方程为 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$,1 分

因为圆 C 经过两点 $A(-1, 0), B(1, -2)$,

所以 $\begin{cases} (-1-a)^2 + 0^2 = r^2, \\ (1-a)^2 + (-2)^2 = r^2, \end{cases}$ 3 分

解之得 $\begin{cases} a = 1, \\ r^2 = 4, \end{cases}$ 4 分

所以 $(x-1)^2 + y^2 = 4$;5 分

(2) 由题意知 $k_{AB} = \frac{-2-0}{1-(-1)} = -1$, 所以直线 l 的斜率为 $k = 1$,7 分

所以设直线 l 的方程为 $y = x + b$,

高三数学答案 (B) 第 2 页 (共 6 页)

得圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|1-0+b|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|1+b|}{\sqrt{2}}$,9 分

因为直线 l 与圆 C 相交所得弦长为 $2\sqrt{3}$, 所以 $d^2 + 3 = 4$,

所以 $(\frac{|1+b|}{\sqrt{2}})^2 + 3 = 4$, 即 $|1+b| = \sqrt{2}$,

求得 $b = \sqrt{2} - 1$ 或 $b = -\sqrt{2} - 1$,11 分

所以直线 l 的方程为 $x - y - \sqrt{2} - 1 = 0$ 或 $x - y + \sqrt{2} - 1 = 0$12 分

20. (12 分)

解: (1) 过点 D 做 $DO \perp AC$ 与点 O ,

因为 $AD = 2\sqrt{3}$, $CD = 6$, $AD \perp DC$,

所以 $AC = 4\sqrt{3}$, $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle DAC = 60^\circ$.

可得 $DO = 3$,2 分

又在 $\triangle ABO$ 中, $BO^2 = AB^2 - 2AB \cdot AO \cdot \cos \angle CAB = 21$,

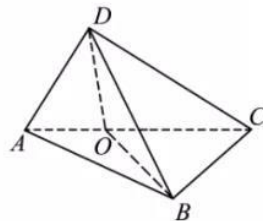
所以在 $\triangle DOB$ 中, $DO^2 + OB^2 = 3^2 + (\sqrt{21})^2 = DB^2$,

所以 $BO \perp DO$,4 分

又因为 $AC \cap OB = O$,

所以 $DO \perp$ 平面 ABC .

所以平面 $ACD \perp$ 平面 ABC ;6 分



(2) 过 O 作 $OE \perp AC$ 交 AB 于 E , 由 (1) 可知, OE , OC , OD' 两两垂直, 以 O 为原点, $\overrightarrow{OE}$ 的方向为 x 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$,7 分

则 $O(0,0,0)$, $E(1,0,0)$, $D(0,0,3)$, $B(3,2\sqrt{3},0)$,

因为 $EO \perp$ 平面 ADF ,

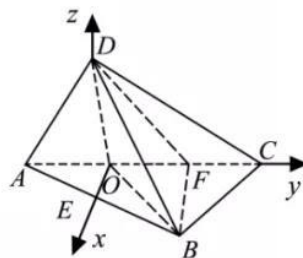
所以 $\overrightarrow{OE} = (1,0,0)$ 为平面 ADF 的一个法向量,

.....8 分

设平面 BDF 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

设 $F(0, t, 0)$,

$\overrightarrow{BD} = (-3, -2\sqrt{3}, 3)$, $\overrightarrow{BF} = (-3, t - 2\sqrt{3}, 0)$,



高三数学答案 (B) 第 3 页 (共 6 页)

$$\text{由} \begin{cases} n \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BF} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -3x - 2\sqrt{3}y + 3z = 0, \\ -3x + (t - 2\sqrt{3})y = 0, \end{cases}$$

取 $y = 3$, 则 $x = t - 2\sqrt{3}, z = t, n = (t - 2\sqrt{3}, 3, t)$,10 分

$$\text{所以} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{|n \cdot \overrightarrow{OE}|}{|n| |\overrightarrow{OE}|},$$

$$\text{即} \frac{|t - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{(t - 2\sqrt{3})^2 + 9 + t^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{得} t = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

所以当 $CF = \frac{11}{4}\sqrt{3}$ 时, 二面角 $A - D'F - B$ 的大小是 $\frac{\pi}{4}$12 分

21. (12 分)

解: (1) 由条件知 $\frac{t}{-\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 得 $t = 2$,1 分

$$\text{又} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } a = 2,$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 1, \text{3 分}$$

$$\text{故 } E \text{ 的方程 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1; \text{4 分}$$

(2) 依题意当 $l \perp x$ 轴不合题意,

当直线 l 斜率存在时, 设直线 $l: y = kx + 2$,

$$\text{将 } y = kx + 2 \text{ 代入 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$\text{得} (1 + 4k^2)x^2 + 16kx + 12 = 0, \text{5 分}$$

$$\text{设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2),$$

$$\text{当 } \Delta = 16(4k^2 - 3) > 0, \text{ 即 } k^2 > \frac{3}{4} \text{ 时,6 分}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-16k}{1 + 4k^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{12}{1 + 4k^2}$$

高三数学答案 (B) 第 4 页 (共 6 页)

从而 $|PQ| = \sqrt{k^2 + 1} |x_1 - x_2| = \frac{4\sqrt{k^2 + 1} \cdot \sqrt{4k^2 - 3}}{1 + 4k^2}$,8 分

又点 O 到直线 PQ 的距离 $d = \frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}}$,

所以 $S_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2} \times d \times |PQ| = \frac{4\sqrt{4k^2 - 3}}{1 + 4k^2}$,10 分

设 $\sqrt{4k^2 - 3} = t$, 则 $t > 0$, $S_{\Delta OPQ} = \frac{4t}{t^2 + 4} = \frac{4}{t + \frac{4}{t}} \leq 1$,

当且仅当 $t = 2, k = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ 等号成立,

所以 $S_{\Delta OPQ}$ 的最大值为 1.12 分

22. (12 分)

解: (1) 该函数的定义域为 $(0, +\infty)$,1 分

$f'(x) = x - \frac{a}{x} = \frac{x^2 - a}{x} (x > 0)$,2 分

①当 $a < 0$ 时, $f'(x) = \frac{x^2 - a}{x} > 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 的递增区间为 $(0, +\infty)$,

.....3 分

②当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \sqrt{a}$ 或 $x = -\sqrt{a}$,

所以函数 $f(x)$ 的递增区间为 $(\sqrt{a}, +\infty)$, 递减区间为 $(0, \sqrt{a})$,

所以当 $a < 0$ 时, $f'(x) = \frac{x^2 - a}{x} > 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 的递增区间为 $(0, +\infty)$;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的递增区间为 $(\sqrt{a}, +\infty)$, 递减区间为 $(0, \sqrt{a})$

.....5 分

(2) 对任意的 $x \in [1, +\infty)$, 使 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ 成立, 只需任意的 $x \in [1, +\infty)$, $f(x)_{\min} \geq \frac{1}{2}$

①当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

所以只需 $f(1) \geq \frac{1}{2}$,

高三数学答案 (B) 第 5 页 (共 6 页)

$$\text{而 } f(1) = \frac{1}{2} - a \ln 1 = \frac{1}{2},$$

所以 $a < 0$ 满足题意;8 分

②当 $0 < a \leq 1$ 时, $0 < \sqrt{a} \leq 1$, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数,

所以只需 $f(1) \geq 0$,

$$\text{而 } f(1) = \frac{1}{2} - a \ln 1 = \frac{1}{2},$$

所以 $0 < a \leq 1$ 满足题意;10 分

③当 $a > 1$ 时, $\sqrt{a} > 1$, $f(x)$ 在 $[1, \sqrt{a}]$ 上是减函数, $[\sqrt{a}, +\infty)$ 上是增函数,

所以只需 $f(\sqrt{a}) \geq 0$ 即可,

$$\text{而 } f(\sqrt{a}) < f(1) = \frac{1}{2},$$

从而 $a > 1$ 不满足题意;

综合①②③实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线

