嘉兴市 2022～2023 学年第二学期期末检测

高二数学 参考答案 （2023.6）

一、单选题（40 分）

1～8　B A D A　B D C B；

二、多选题（20 分）

9．ABD；　10．AC；　11．BCD；　12．ACD；

三、填空题（20 分）

13．50；　14．80；　15．$\frac{8}{23}$；　16．$(\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$；

8. 因为平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，所以可将三棱锥 $P-ABC$ 置于直二面角中，

取 AB 中点 O，因为 $PA=PB=2$，所以 $OP\perp AB$，

由面面垂直性质定理可知 $OP\perp$ 平面 ABC，所以三棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OP$，

因为 $PC=\frac{\sqrt{10}}{2}$，$OC=\sqrt{PC^2-OP^2}$，所以当 OP 长度确定时，OC 长度不变，此时当 $OC\perp AB$ 时 $\triangle ABC$ 面积达到最大，故求出当 $OC\perp AB$ 时三棱锥体积的最大值即可.

当 $OC\perp AB$ 时，令 $\angle APO=\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，则 $OP=2\cos\theta$，$AB=4\sin\theta$，$OC=\sqrt{\frac{5}{2}-4\cos^2\theta}$，

则 $V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OP=\frac{1}{3}\cdot 2\sin\theta\cdot\sqrt{\frac{5}{2}-4\cos^2\theta}\cdot 2\cos\theta=\frac{2}{3}\sqrt{\sin^2 2\theta\cdot(\frac{5}{2}-4\cos^2\theta)}$

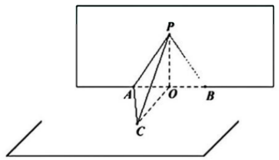
$=\frac{2}{3}\sqrt{(1-\cos^2 2\theta)(\frac{1}{2}-2\cos 2\theta)}$，由 $(1-\cos^2 2\theta)(\frac{1}{2}-2\cos 2\theta)>0$ 可得 $-1<\cos 2\theta<\frac{1}{4}$，

令 $\cos 2\theta=t\in(-1,\frac{1}{4})$，则 $f(t)=(1-\cos^2 2\theta)(\frac{1}{2}-2\cos 2\theta)=(1-t^2)(\frac{1}{2}-2t)$，

从而 $f'(t)=6t^2-t-2=(2t+1)(3t-2)$，

当 $t\in(-1,-\frac{1}{2})$ 时 $f'(t)>0$，$f(t)$ 递增，

当 $t\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ 时 $f'(t)<0$，$f(t)$ 递减，



所以 $f(t)_{\max}=f(-\frac{1}{2})=\frac{9}{8}$，$V_{\max}=\frac{2}{3}\sqrt{f(t)_{\max}}=\frac{2}{3}\times\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解法二：$(1-\cos^2 2\theta)(\frac{1}{2}-2\cos 2\theta)=\frac{1}{3}(1-\cos 2\theta)(3+3\cos 2\theta)(\frac{1}{2}-2\cos 2\theta)$

由三元均值不等式 $abc\le(\frac{a+b+c}{3})^3(a,b,c>0)$ 可得

$$(1-\cos 2\theta)(3+3\cos 2\theta)(\frac{1}{2}-2\cos 2\theta)\le[\frac{(1-\cos 2\theta)+(3+3\cos 2\theta)+(\frac{1}{2}-2\cos 2\theta)}{3}]^3=\frac{27}{8},$$

当且仅当 $1-\cos 2\theta=3+3\cos 2\theta=\frac{1}{2}-2\cos 2\theta$ 即 $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$ 时取到等号，此时 $\theta=\frac{\pi}{3}$，

$V_{\max}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{27}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12．令 $x=y=0$ 可得 $f(1)=0$，A 选项正确；

令 $x=0$，则 $f(-y)-f(y)=f(1)\cdot f(y+1)=0$，即 $f(-y)=f(y)$，则 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数；

令 $x=y=-1$，则 $f(0)-f(-2)=[f(0)]^2$，即 $f(0)-f(2)=[f(0)]^2$ ①；

令 $x=y=1$，则 $f(0)-f(2)=[f(2)]^2$ ②，由①②得 $[f(0)]^2=[f(2)]^2$，即 $f(0)=\pm f(2)$；

若 $f(0)=f(2)$，则 $[f(0)]^2=f(0)-f(2)=0$，与条件 $f(0)\ne 0$ 不符，故 $f(0)=-f(2)$，

此时有 $2f(0)=[f(0)]^2$，因为 $f(0)\ne 0$，所以 $f(0)=2,f(2)=-2$，B 选项错误；

令 $y=1$，则 $f(x-1)-f(x+1)=f(x+1)f(2)=-2f(x+1)$，即 $f(x-1)=-f(x+1)$，

所以 $f(x+2)=-f(x)$，从而 $f(x+4)=f(x)$，故 $T=4$ 为函数 $f(x)$ 的一个周期，

所以 $f(3)=f(-1)$，C 选项正确；

因为 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(3)=-f(1)=0$，$f(4)=-f(2)=2$，此时有 $\sum_{k=1}^{4}f(k)=0$，则 $\sum_{k=1}^{23}f(k)=f(1)+f(2)+f(3)=-2$，D 选项正确，综上，答案为 ACD.

16. 原不等式等价于 $3\sin^5\theta-5\sin^3\theta>3(-\cos 2\theta)^5-5(-\cos 2\theta)^3$，

令 $f(x)=3x^5-5x^3$，则不等式等价于 $f(\sin\theta)>f(-\cos 2\theta)$，

因为 $f'(x)=15x^2(x^2-1)$，所以当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，

又因为 $\sin\theta, -\cos 2\theta \in [-1,1]$，所以由 $f(\sin\theta) > f(-\cos 2\theta)$ 及 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减可得

$\sin\theta < -\cos 2\theta$，即 $2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 > 0$，即 $(2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 1) > 0$，

解得 $\sin\theta < -\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin\theta > 1$，因为 $\theta \in [0, \pi)$，所以 $\theta \in (\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6})$.

四、解答题（70 分）

17.（本题满分 10 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，且 $a_1 > 0$，已知 $\dfrac{S_{n+1}}{a_{n+1}} - \dfrac{S_n}{a_n} = \dfrac{1}{2}$.

（1）若 $a_1 = 1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $\dfrac{1}{S_1} + \dfrac{1}{S_2} + \cdots + \dfrac{1}{S_n} < 1$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，求 a_1 的取值范围.

解：（1）

由题意得 $\{\dfrac{S_n}{a_n}\}$ 为公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列，则 $\dfrac{S_n}{a_n} = 1 + \dfrac{1}{2}(n-1) = \dfrac{n+1}{2}$，　　………………2 分

即 $2S_n = (n+1)a_n$，$2S_{n-1} = na_{n-1}$，两式作差得 $2a_n = (n+1)a_n - na_{n-1}$，　　………………3 分

即 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{n}{n-1}(n \geq 2)$，$\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{a_{n-1}}{n-1} = \cdots = \dfrac{a_1}{1}$，得 $a_n = na_1$，

因为 $a_1 = 1$，所以 $a_n = n$.　　………………5 分

也可用累乘法 $\dfrac{a_2}{a_1}\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2}{1} \times \dfrac{3}{2} \times \cdots \times \dfrac{n}{n-1}$ 得到 $a_n = na_1$.

（2）$S_n = \dfrac{(a_1 + na_1)\cdot n}{2}$，$\dfrac{1}{S_n} = \dfrac{2}{a_1} \cdot \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{2}{a_1} \cdot (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1})$，　　………………7 分

则 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{S_k} = \dfrac{2}{a_1} \sum\limits_{k=1}^{n} (\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}) = \dfrac{2}{a_1}(1 - \dfrac{1}{n+1})$，　　………………9 分

当 $n \to +\infty$ 时有 $\dfrac{2}{a_1}(1 - \dfrac{1}{n+1}) \to \dfrac{2}{a_1}$，

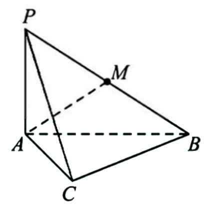
因为 $a_1 > 0$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{S_k} < 1$ 恒成立等价于 $\dfrac{2}{a_1} \leq 1$，从而 $a_1 \geq 2$.　　………………10 分

18.（本题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\perp$ 平面 PBC.

（1）求证：$BC\perp$ 平面 PAC；

（2）若 $BC=\sqrt{3}AC$，M 是 PB 的中点，AM 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$，求平面 PBC 与平面 ABC 夹角的余弦值.



第 18 题图

解：（1）过点 A 作 $AD\perp PC$ 于点 D，因为平面 $PAC\perp$ 平面 PBC，

平面 $PAC\cap$ 平面 $PBC=PC$，$AD\subset$ 平面 PAC，所以 $AD\perp$ 平面 PBC ………………4 分

则 $AD\perp BC$，又因为 $PA\perp$ 平面 ABC，所以 $PA\perp BC$，

$PA\cap AD=A$，故 $BC\perp$ 平面 PAC. ………………6 分

（2）几何法：因为 $BC\perp$ 平面 PAC，所以 $BC\perp AC$，又因为 $AD\perp$ 平面 PBC，

所以 $\angle AMD$ 为 AM 与平面 PBC 的所成角， ………………8 分

令 $BC=\sqrt{3}$，$AC=1$，$PA=a$，则 $AD=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$，$AM=\frac{1}{2}PB=\frac{\sqrt{a^2+4}}{2}$，

则 $\sin\alpha=\frac{2a}{\sqrt{(a^2+1)(a^2+4)}}=\frac{2}{3}$，解得 $a=\sqrt{2}$； ………………10 分

因为 $PC\perp BC$，$AC\perp BC$，且平面 $ABC\cap$ 平面 $PBC=BC$，

所以 $\angle PCA$ 为 $P-BC-A$ 的平面角，$\cos\angle PCA=\frac{AC}{PC}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ………………12 分

坐标法：因为 $BC\perp$ 平面 PAC，所以 $BC\perp AC$，则以 CA 为 x 轴，CB 为 y 轴建立空间直角坐标系，z 轴 // AP，取 $BC=\sqrt{3}$，$AC=1$，$PA=a$，则 $A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$P(1,0,a)$，

$M(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{a}{2})$，$\vec{CP}=(1,0,a)$，$\vec{CB}=(0,\sqrt{3},0)$，$\vec{AM}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{a}{2})$，

令平面 PBC 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，由 $\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=\vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ 可得：$y=0, x+a\cdot z=0$，

取 $x=a, y=0, z=-1$，即 $\vec{m}=(a,0,-1)$，

平面 ABC 的法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$，设 AM 与平面 PBC 所成角为 α， ………………8 分

则 $\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{AM},\vec{m}>\right|=\left|\dfrac{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2+1}\cdot\sqrt{1+\frac{a^2}{4}}}\right|=\dfrac{2}{3}$，解得 $a=\sqrt{2}$， ………………10 分

此时 $\vec{m}=(\sqrt{2},0,-1)$，则 $\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{-1}{1\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

设平面 PBC 与平面 ABC 的夹角为 β，则 $\cos\beta=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$． ………………12 分

19．（本题满分 12 分）

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．已知 $B=\dfrac{\pi}{2}$，$\sin A=1-\dfrac{c}{\sqrt{3}b}$．

（1）求角 A 的大小；

（2）若 D 为线段 AC 上的一点，且满足 $AD=1, BD=2$，求 $\triangle BDC$ 的面积．

解：

（1）$\sin A=1-\dfrac{\sin C}{\sqrt{3}\sin B}=1-\dfrac{\sin C}{\sqrt{3}}$， ………………2 分

因为 $B=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin C=\cos A$，则 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=\sqrt{3}$， ………………4 分

即 $\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $A=\dfrac{\pi}{6}$． ………………6 分

（2）因为 $\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=\dfrac{BD}{\sin 30^\circ}$，所以 $\sin\angle ABD=\dfrac{1}{4}$ ………………8 分

$\cos\angle DBC=\sin\angle ABD=\dfrac{1}{4}$，所以 $\sin\angle DBC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，

$CD=\dfrac{BD}{\sin 60^\circ}\cdot\sin\angle DBC=\sqrt{5}$， ………………10 分

$S_{\triangle BDC}=\dfrac{1}{2}\times CD\times BC\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}+5\sqrt{3}}{8}$． ………………12 分

20.（本题满分 12 分）

某校学生每一年需要进行一次体测，体测包含肺活量、50 米跑、立定跳远等多个项目，现对该校的 80 位男生的肺活量等级（优秀、良好、合格、不合格）进行统计，得到如下列联表：

身高	肺活量等级		合计
	良好和优秀	不合格和合格	
低于 175 公分	22	22	44
不低于 175 公分	30	6	36
合计	52	28	80

（1）能否有 99.5%的把握认为男生的身高与肺活量的等级划分有关联？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $a+b+c+d=n$.

$P(K^2\geq k)$	0.01	0.005	0.001
k	6.635	7.879	10.828

（2）某体测小组由 6 位男生组成，其中肺活量等级不合格的有 1 人，良好的有 4 人，优秀的有 1 人，肺活量等级分按如下规则计算：不合格记 0 分，合格记 1 分，良好记 2 分，优秀记 3 分. 在该小组中随机选择 2 位同学，记肺活量等级分之和为 X，求 X 的分布列和均值.

解：

（1）$K^2==\dfrac{80\times(22\times 6-2\times 30)^2}{44\times 36\times 52\times 28}\approx 9.67>7.879$， ………………3 分

所以我们有 99.5%的把握认为男生的身高与肺活量的等级划分有关联. ………………6 分

（2）由题意，$P(X=2)=\dfrac{C_1^1C_4^1}{C_6^2}=\dfrac{4}{15}$，$P(X=3)=\dfrac{C_1^1C_1^1}{C_6^2}=\dfrac{1}{15}$，$P(X=4)=\dfrac{C_4^2}{C_6^2}=\dfrac{6}{15}$，

$P(X=5)=\dfrac{C_4^1C_1^1}{C_6^2}=\dfrac{4}{15}$， ………………10 分

则 X 服从的分布列如下：

X	2	3	4	5
P	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$

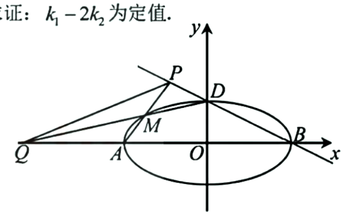
$E(X)=2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{1}{15}+4\times\frac{6}{15}+5\times\frac{4}{15}=\frac{11}{3}$. ………………12 分

21.（本题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左右顶点分别为 A,B，上顶点为 D，M 为椭圆 C 上异于四个顶点的任意一点，直线 AM 交 BD 于点 P，直线 DM 交 x 轴于点 Q.

（1）求 $\triangle MBD$ 面积的最大值；

（2）记直线 PM,PQ 的斜率分别为 k_1,k_2，求证：k_1-2k_2 为定值.



第 21 题图

（1）设 $M(2\cos\alpha,\sin\alpha)$，$l_{BD}:x+2y-2=0$，则点 M 到直线 BD 的距离为：

$d=\frac{|2\cos\alpha+2\sin\alpha-2|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|2\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})-2\right|}{\sqrt{5}}$， ………………2 分

$d=\frac{\left|2\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})-2\right|}{\sqrt{5}}\le\frac{|-2\sqrt{2}-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}}$，

$S_{\triangle MDB}\le\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}+1$. ………………4 分

另解：设与 BD 平行的直线 $l:x+2y+t=0$，联立 $\begin{cases}x+2y+t=0\\x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得

$8y^2+4ty+t^2-4=0$，令 $\Delta=16(-t^2+8)=0\Rightarrow t=\pm2\sqrt{2}$， ………………2 分

显然当 $t=2\sqrt{2}$ 时 l 与椭圆的切点与直线 BD 的距离最大，

$d_{\max}=\dfrac{|2\sqrt{2}-(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}}$，$S_{\triangle MDB}\le\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}+1$. ………………4 分

（2）设直线 $l_{AM}: x=my-2$，联立 $\begin{cases}x^2+4y^2=4\\x=my-2\end{cases}$ 得 $(m^2+4)y^2-4my=0$，

则点 M 的坐标为 $(\dfrac{2m^2-8}{m^2+4},\dfrac{4m}{m^2+4})$， ………………6 分

设点 Q 为 $(t,0)$，则 $k_{QD}=k_{MD}$，即 $\dfrac{1}{-t}=\dfrac{\dfrac{4m}{m^2+4}-1}{\dfrac{2m^2-8}{m^2+4}}$，即 $t=\dfrac{2(m+2)}{m-2}$ ………………8 分

即 Q 为 $(\dfrac{2(m+2)}{m-2},0)$，

联立 $\begin{cases}x=my-2\\y=-\dfrac{1}{2}x+1\end{cases}$ 得点 P 的坐标为 $(\dfrac{2(m-2)}{m+2},\dfrac{4}{m+2})$， ………………10 分

$k_1=\dfrac{1}{m}$，$k_2=\dfrac{\dfrac{4}{m+2}-0}{\dfrac{2(m-2)}{m+2}-\dfrac{2(m+2)}{m-2}}=\dfrac{2-m}{4m}=\dfrac{1}{2m}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}k_1-\dfrac{1}{4}$，

整理得 $k_1-2k_2=\dfrac{1}{2}$. ………………12 分

22.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln\dfrac{x}{a}-x$，$g(x)=ax-ae^x$.（e =2.71828…为自然对数的底数）

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的最大值；

（2）已知 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且满足 $f(x_1)>g(x_2)$，求证：$x_1+ae^{x_2}>2a$.

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$， ………………2 分

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-1$. ………………4 分

（2）由 $f(x_1)>g(x_2)$ 可得 $a\ln\dfrac{x_1}{a}-x_1>ax_2-ae^{x_2}$，即 $\ln\dfrac{x_1}{a}-\dfrac{x_1}{a}>\ln e^{x_2}-e^{x_2}$.

令 $h(x)=\ln x-x$，由（1）可知，$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $h(\frac{x_1}{a})>h(e^{x_2})$，令 $t_1=\frac{x_1}{a}$，$t_2=e^{x_2}$，又 $x_1>0$，$x_2>0$，所以 $t_1>0$，$t_2>1$，则

$h(t_1)>h(t_2)$，　………………6 分

① 若 $t_1\geq 1$，则 $t_1+t_2>2$，即 $\frac{x_1}{a}+e^{x_2}>2$，所以 $x_1+ae^{x_2}>2a$；　………………8 分

②若 $0<t_1<1$，设 $t_1'\in(1,+\infty)$，且满足 $h(t_1')=h(t_1)$，则 $h(t_1')=h(t_1)>h(t_2)$，所以 $1<t_1'<t_2$，

下证：$t_1'+t_1>2$．令 $F(x)=h(x)-h(2-x)=\ln x-\ln(2-x)-2x+2$，$x\in(0,1)$，

则 $F'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}-2=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}>0$，

$F(x)=h(x)-h(2-x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单调递增，所以 $F(x)<F(1)=0$，

所以 $F(t_1)=h(t_1)-h(2-t_1)<0$，即 $h(t_1)<h(2-t_1)$，　………………10 分

又因为 $h(t_1')=h(t_1)$，所以 $h(t_1')<h(2-t_1)$，$t_1',2-t_1\in(1,+\infty)$，所以 $t_1'>2-t_1$，所以 $t_1'+t_1>2$，因为 $1<t_1'<t_2$，从而 $t_1+t_2>2$，即 $x_1+ae^{x_2}>2a$．由①②可知，$x_1+ae^{x_2}>2a$ 得证．　………………12 分