

2022—2023 学年下期期末联考

高二数学试题

(考试时间:120 分钟)

(试卷满分:150 分)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

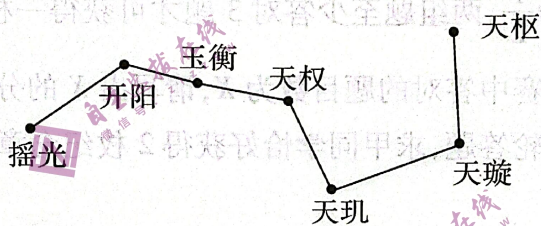
1. 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 4\}$, $B = \{x | x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cup B =$

- A. $[-1, 4)$ B. $(0, 1]$ C. $[-1, 3)$ D. $[-1, 2]$

2. 函数 $f(x) = x^4 - 2x$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为

- A. $y = 2x + 3$ B. $y = -2x + 1$
C. $y = 2x - 3$ D. $y = -2x - 1$

3. 北斗七星自古是我国人民辨别方向判断季节的重要依据,北斗七星分别为天枢、天璇、天玑、天权、玉衡、开阳、摇光,其中玉衡最亮,天权最暗.一名天文爱好者从七颗星中随机选三颗进行观测,则玉衡和天权都未被选中的概率为



- A. $\frac{10}{21}$ B. $\frac{11}{21}$ C. $\frac{5}{7}$ D. $\frac{2}{7}$

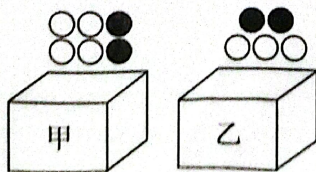
4. “ $\lg a > \lg b$ ”是“ $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ”成立的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

5. 设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $f(x) = P(X \geq x)$, 其中 $x > 0$, 则 $f(-x) + f(x)$ 的值为

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. $(0, 1)$ 的不确定值

6. 现有完全相同的甲,乙两个箱子(如下图),其中甲箱装有 2 个黑球和 4 个白球,乙箱装有 2 个黑球和 3 个白球,这些球除颜色外完全相同.某人先从两个箱子中任取一个箱子,再从中随机摸出一球,则摸出的球是黑球的概率是



- A. $\frac{11}{15}$ B. $\frac{11}{30}$ C. $\frac{1}{15}$ D. $\frac{2}{15}$

7. 代数式 $(x-1)^5(x-2)$ 的展开式中 x^4 的系数为
 A. 20 B. -20 C. 10 D. -10

8. 已知 $a = e^{3-a}, 1 + \ln b = e^{2-\ln b} (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $ab =$
 A. 2 B. 3 C. e^2 D. e^3

二、选择题(本题共4个小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的四个选项中,有多项是符合题目要求的,全部选对得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.)

9. 某服装公司对1-5月份的服装销量进行了统计,结果如下:

月份编号 x	1	2	3	4	5
销量 y (万件)	50	96	142	185	227

若 y 与 x 线性相关,其线性回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 7.1$, 则下列说法正确的是

A. 线性回归方程必过 $(3, 140)$ B. $\hat{b} = 44.3$
 C. 相关系数 $r < 0$ D. 6月份的服装销量一定为 272.9 万件

10. 若 $f(x) = \ln x + \frac{1}{2}x^2 - bx$ 在定义域上不单调,则实数 b 的值可能是
 A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. 通过随机询问相同数量的不同性别的大学生在购买食物时是否看营养说明,得知有 $\frac{1}{6}$ 的男大学生“不看”,有 $\frac{1}{3}$ 的女大学生“不看”,若有 99% 的把握认为性别与是否看营养说明之间有关,则调查的总人数可能为

附: $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

α	0.10	0.010	0.001
χ_α	2.706	6.635	10.828

A. 150 B. 170 C. 190 D. 210

12. 已知 $a > 0, b > 0$, 且 $a + b = 6$, 则下列不等式一定成立的是

A. $(1+a)(1+b) \leq 16$ B. $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+3} \leq 3 + \sqrt{7}$
 C. $2^{a-b} > \frac{1}{64}$ D. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{9}$

三、填空题(本题共4个小题,每小题5分,共20分.)

13. 将 6 本不同的书分成两堆,每堆至少两本,则不同的分堆方法共有 _____ 种.

14. 函数 $f(x) = -x(\ln x - 1)$ 的最大值为 _____.

15. 若命题“函数 $f(x) = -x^3 + mx^2 - x$ 无极值”为真命题,则实数 m 的取值范围是 _____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2e^x + x, & x \leq 0 \\ 2x - 1, & x > 0 \end{cases}$, 若 $x_2 > x_1$ 且 $f(x_2) = f(x_1)$, 则 $x_2 - x_1$ 的最小值是 _____.

四、解答题(本题共6个小题,共70分.解答应写出必要的文字说明,证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分10分)

已知函数 $f(x) = 3x^2 - (a+1)x + 2$.

(1) 当 $a=4$ 时,求不等式 $f(x) > 0$ 的解集;

(2) 当 $x > 0$ 时,不等式 $\frac{f(x)}{x} > \frac{1}{x} - 3x$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

18. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1 (a \in \mathbf{R})$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且只有一个零点.

(1) 求 a ;

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ 处的切线方程.

19. (本小题满分12分)

为加强环境保护,治理空气污染,环境监测部门对某市空气质量进行调研,随机抽查了100天空气中的PM2.5和SO₂浓度(单位:μg/m³),得下表:

PM2.5 浓度	SO ₂ 浓度		
	[0,50]	(50,150]	(150,475]
[0,35]	32	18	4
(35,75]	6	8	12
(75,115]	3	7	10

(1) 估计事件“该市一天空气中PM2.5浓度不超过75,且SO₂浓度不超过150”的概率;

(2) 根据所给数据,完成下面的2×2列联表:

PM2.5 浓度	SO ₂ 浓度	
	[0,150]	(150,475]
[0,75]		
(75,115]		

并依据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验,能否推断该市一天空气中PM2.5浓度与SO₂浓度有关?

$$\text{附: } \chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

α	0.050	0.010	0.001
χ_{α}	3.841	6.635	10.828

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 有 2 个极值点, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

某校开展“学习二十大, 永远跟党走”网络知识竞赛. 每人可参加多轮答题活动, 每轮答题情况互不影响. 每轮比赛共有两组题, 每组都有两道题, 只有第一组的两道题均答对, 方可进行第二组答题, 否则本轮答题结束. 已知甲同学第一组每道题答对的概率均为 $\frac{2}{3}$, 第二组每道题答对的概率均为 $\frac{1}{2}$, 两组题至少答对 3 题才可获得一枚纪念章.

(1) 记甲同学在一轮比赛中答对的题目数为 X , 请写出 X 的分布列, 并求 $E(X)$;

(2) 若甲同学进行了 4 轮答题, 求甲同学恰好获得 2 枚纪念章的概率.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - 2x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) + x(2+a) = xe^x$ 有两个相异实根, 求实数 a 的取值范围.