2023年3月济南市高三模拟考试

数学试题参考答案

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	D	C	B	C	B

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

题号	9	10	11	12
答案	AD	BC	ABD	ACD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．160；　　14．$2x-4y+5=0$；　　15．$[\frac{5}{3},\frac{10}{3}]$；　　16．2．

四、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10分）

【解析】（1）因为 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x-\cos^2 x=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，

所以 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，

解得 $k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{5\pi}{6}$，

所以 $f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right]\left(k\in\mathbf{Z}\right)$．

（2）因为 $f(A)=2\sin(2A-\frac{\pi}{6})=2$，所以 $\sin(2A-\frac{\pi}{6})=1$．

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $2A-\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6})$，所以 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，

所以 $A=\frac{\pi}{3}$．

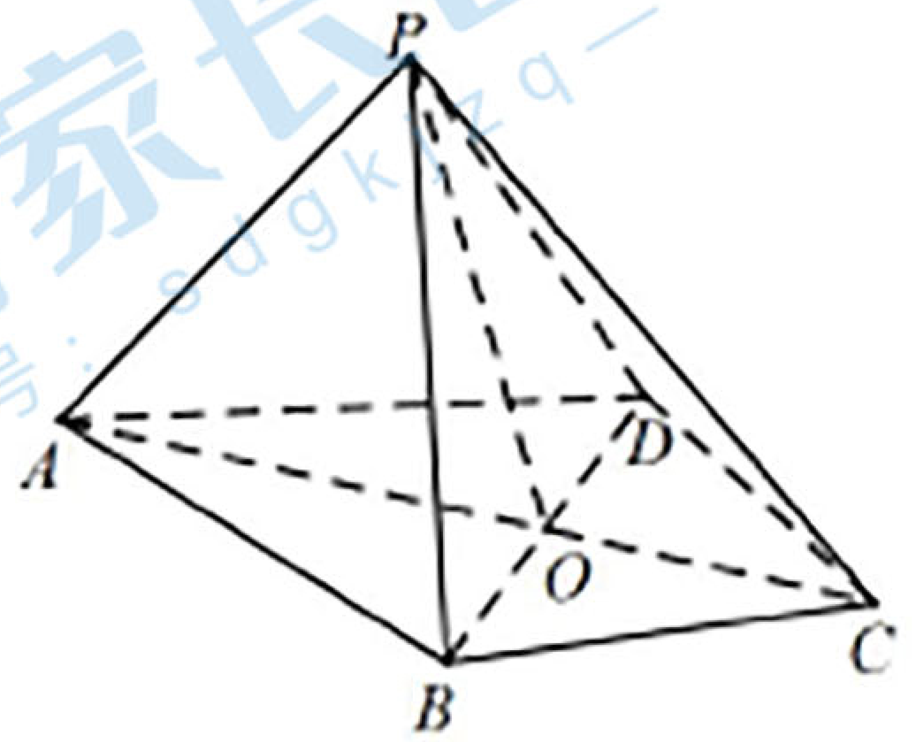
由题意知，$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，

所以 $\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\angle BAD+\frac{1}{2}AD\cdot AC\sin\angle CAD=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC$，

所以 $AD=\frac{6}{5}\sqrt{3}$．

18.（12 分）

【解析】（1）如图，连接 AC，交 BD 于点 O，连接 PO，



由 $AD=AB$，$CD=BC$，$AC=AC$，

可得 $\triangle ABC\cong\triangle ACD$，所以 $\angle BAC=\angle DAC$，

又 $AO=AO$，所以 $\triangle AOB\cong\triangle AOD$，

所以 $BO=OD$，即 O 为 BD 中点，

在等腰 $\triangle PBD$ 中，可得 $BD\perp OP$，

在等腰 $\triangle BCD$ 中，$BD\perp OC$，又 $OP\cap OC=O$，

所以 $BD\perp$ 平面 POC，

又 $PC\subset$ 平面 POC，

所以 $BD\perp PC$．

（2）由（1）可得，$AC\perp BD$，

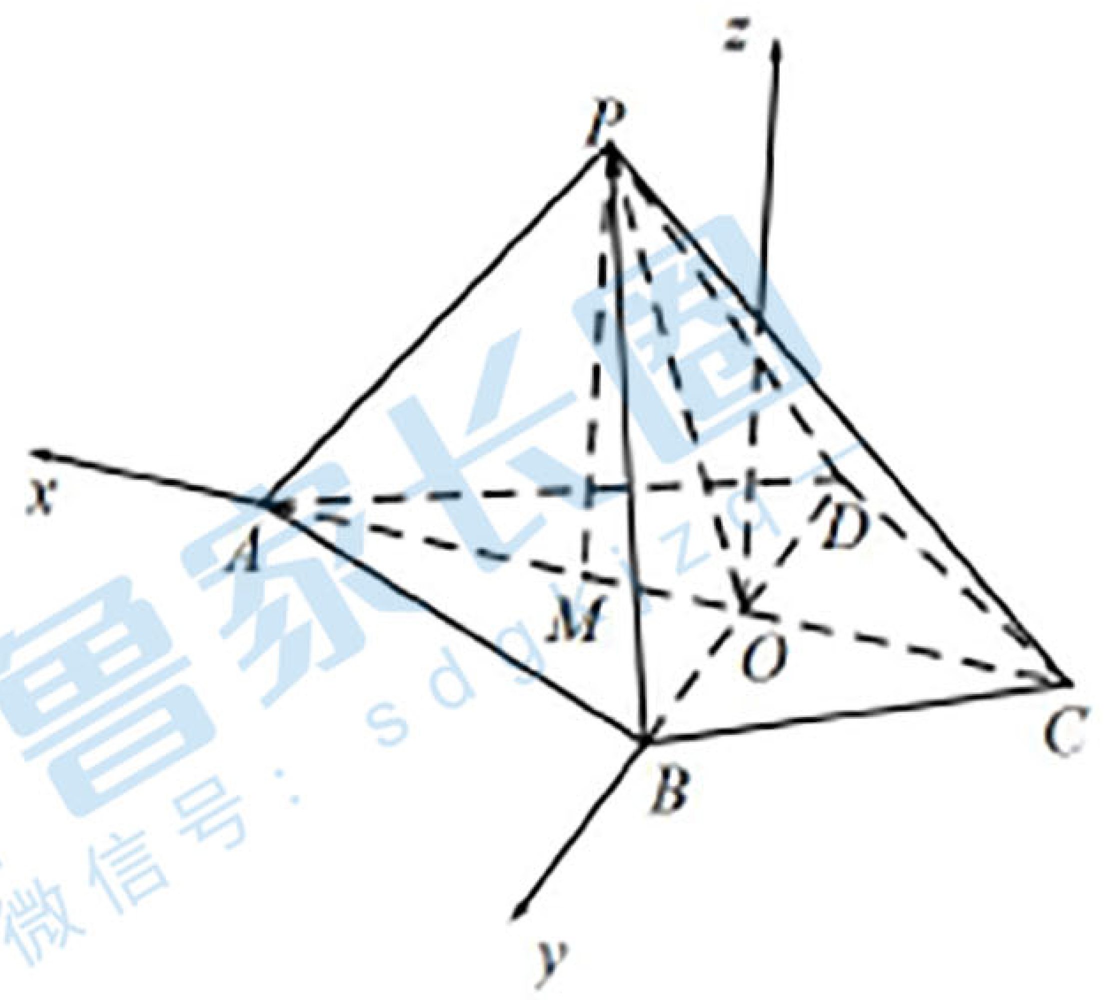
又 $CD=\sqrt{7}$，$OD=\dfrac{1}{2}BD=\sqrt{3}$，

所以 $CO=\sqrt{CD^2-OD^2}=2$，$AO=\sqrt{3}OD=3$，

由于 $P-ABD$ 为正三棱锥，点 P 在底面 ABD 的垂足一定在 AO 上，设垂足为 M，

根据正三棱锥的性质可得 $AM=\dfrac{2}{3}AO=2$，$PM=\sqrt{AP^2-AM^2}=\sqrt{3}$，

如图，以 OA，OB 所在直线为 x 轴，y 轴建立空间直角坐标系．



可得 $A(3,0,0)$，$C(-2,0,0)$，$D(0,-\sqrt{3},0)$，$P(1,0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{PC}=(-3,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DC}=(-2,\sqrt{3},0)$

又 $\overrightarrow{AC}=(-5,0,0)$，

（或 $\overrightarrow{AD}=(-3,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,0,\sqrt{3})$）

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，可得

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x-\sqrt{3}z=0\\ -2x+\sqrt{3}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x+z=0\\ 2x-\sqrt{3}y=0\end{cases},$$

不妨令 $x=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},2,-3)$，

所以 $d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$，

故所以点 A 到平面 PCD 的距离为 $\dfrac{5}{4}\sqrt{3}$．

19.（12 分）

【解析】（1）因为 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{1+a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{1+a_n}{n}$

$=\dfrac{n(1+a_{n+1})-(n+1)(1+a_n)}{(n+1)n}=\dfrac{n+na_{n+1}-(n+1)-(n+1)a_n}{(n+1)n}=\dfrac{n+1-(n+1)}{(n+1)n}$

$=0$．

所以 $b_{n+1}=b_n$．

所以 $\{b_n\}$ 是常数数列．

（2）因为 $a_1=1$，所以 $b_n=b_1=\dfrac{1+a_1}{1}=2$．

所以 $\dfrac{1+a_n}{n}=2$．

所以 $a_n=2n-1$．

因为 $c_n=\sin\left[\dfrac{\pi}{2}(2n-1)\right]+2^{2n-1}=\sin\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)+2^{2n-1}$．

所以 $S_{2n}=\left[\sin\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{3\pi}{2}+\sin\dfrac{5\pi}{2}+\cdots+\sin\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]+\left(2^1+2^3+2^5+\cdots+2^{4n-1}\right)$

$=(1-1+1-1+\cdots-1)+\dfrac{2(1-4^{2n})}{1-4}=\dfrac{2^{4n+1}-2}{3}$．

所以 $S_{2n}=\dfrac{2^{4n+1}-2}{3}$．

20.（12 分）

【解析】（1）$\bar{x}=\dfrac{1}{10}\times(38+41+44+51+54+56+58+64+74+80)=56$．

（2）因为体质测试不合格的学生有 3 名，

所以 X 的可能取值为 0，1，2，3．

因为 $P(X=0)=\dfrac{C_7^3}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{24}$，$P(X=1)=\dfrac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\dfrac{21}{40}$，$P(X=2)=\dfrac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{40}$，$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$．

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{7}{24}$	$\dfrac{21}{40}$	$\dfrac{7}{40}$	$\dfrac{1}{120}$

（3）因为 $\bar{x}=56$，$s^2=\dfrac{1}{10}\times(18^2+15^2+12^2+5^2+2^2+0^2+2^2+8^2+18^2+24^2)=169$．

所以 $\mu=56$，$\sigma=13$．

因为 $P(30\leqslant X\leqslant 82)=P(\mu-2\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，

所以学生的体质测试成绩恰好落在区间 $[30,82]$ 得概率约为 0.9545．

因为 100 名学生的体质测试成绩恰好落在区间 $[30,82]$ 的人数为 $Y\sim B(100,0.9545)$

所以 $E(Y)=100\times0.9545=95.45$．

21．（12分）

【解析】（1）将 $y=kx-2pk+2p$ 代入 $x^2=2py$，化简得 $x^2+2pkx+4p^2(k-1)=0$．（*）

方程（*）的判别式 $\Delta=4p^2k^2-4(4p^2k-4p^2)=0$

化简得 $k^2-4k+4=0$，

即 $k=2$.

（2）设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B),C(x_C,y_C),D(x_D,y_D),E(x_E,y_E),F(x_F,y_F)$，

抛物线 $x^2=2py$ 上过点 A，B，C 的切线方程分别为

$2py=2x_Ax-x_A^2$ ，
$2py=2x_Bx-x_B^2$ ，
$2py=2x_Cx-x_C^2$ ，

两两联立，可以求得交点 D，E，F 的横坐标分别为

$x_D=\dfrac{x_A+x_B}{2}$，

$x_E=\dfrac{x_A+x_C}{2}$ ，

$x_F=\dfrac{x_B+x_C}{2}$ ，

注意到结论中线段长度的比例可以转化为点的横坐标的比例，得

$$\frac{|AD|}{|DE|}=\frac{|EF|}{|FC|}=\frac{|DB|}{|BF|}=\left|\frac{x_B-x_A}{x_C-x_B}\right|.$$

命题得证．

22．（12分）

【解析】（1）$f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$，$f(1)=e-\dfrac{1}{2}$，

$f'(x)=e^x-x$，$f'(1)=e-1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程 $y-(e-\dfrac{1}{2})=(e-1)(x-1)$，

即 $2(e-1)x-2y+1=0$ ．

（2）因为 $f'(x)=e^x-ax^2-x-2a\geqslant 0$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $a\leqslant\left(\dfrac{e^x-x}{x^2+2}\right)_{\min}$，

令 $g(x)=\dfrac{e^x-x}{x^2+2}$，则 $g'(x)=\dfrac{(e^x-1)(x^2+2)-(e^x-x)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$，

令 $h(x)=(e^x-1)(x^2+2)-(e^x-x)\cdot 2x$，则 $h'(x)=x^2e^x+2x$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 单调递增，$h(x)\geqslant h(0)=0$，

所以 $g'(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 单调递增，

$g(x)_{\min}=g(0)=\frac{1}{2}$，

所以 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

（3）$f(x)=e^x-\frac{a}{3}x^3-\frac{x^2}{2}-2ax$ ，$f(0)=1$ ，

$f'(x)=e^x-ax^2-x-2a$，$f'(0)=1-2a$ ，$f''(x)=e^x-2ax-1$ ，$f'''(x)=e^x-2a$ ，

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=e^x-\frac{1}{6}x^3-\frac{x^2}{2}-x$ ，$f'(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1$ ，

令 $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-x-1$ ，则 $g'(x)=e^x-x-1$ ，$g''(x)=e^x-1$ ，

当 $x<0$ 时，$g''(x)<0$ ，$g'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $x\geqslant 0$ 时，$g''(x)\geqslant 0$ ，$g'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

$g'(x)\geqslant g'(0)=0$ ，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(0)=0$ ，

所以，当 $x<0$ 时，$g(x)<0$ ，$f'(x)<0$ ，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $x>0$ 时，$g(x)>0$ ，$f'(x)>0$ ，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(0)=1$.

所以 $a=\frac{1}{2}$ 适合，

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，当 $0<x<\ln 2a$ 时，$f'''(x)<0$ ，

$f''(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减，$f''(x)<f''(0)=0$ ，

$f'(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减，

$f'(x)<f'(0)=1-2a<0$ ，$f(x)$ 在 $(0,\ln 2a)$ 上单调递减，

此时，$f(x)<f(0)=1$ ，舍去.

当 $a\leqslant 0$ 时，当 $x<0$ 时，$f''(x)=e^x-2ax-1<0$ ，

$f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，$f'(x)>f'(0)=1-2a>0$ ，

$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，$f(x)<f(0)=1$ ，舍去；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，当 $\ln 2a<x<0$ 时，$f'''(x)>0$ ，$f''(x)$ 在 $(\ln 2a,0)$ 上单调递增，

$f''(x)<f''(0)=0$ ，$f'(x)$ 在 $(\ln 2a,0)$ 上单调递减，

$f'(x)>f'(0)=1-2a>0$ ，$f(x)$ 在 $(\ln 2a,0)$ 上单调递增，

此时，$f(x)<f(0)=1$ ，舍去.

综上，$a=\frac{1}{2}$.