# 太原市2023年高三年级模拟考试（一）
## 数学试题参考答案及评分标准

**一、选择题：** A C D B A C D C

**二、选择题：** 9. B C　10. A C D　11. A C　12. A D

**三、填空题：** 13. $30°$　14. 1　15. $\pm\sqrt{2}$　16. $\dfrac{2}{\pi}$

**四、解答题：** 17. 解：(1) 设$\{a_n\}$的公差为$d$，$\because\{\sqrt{S_n}\}$是等差数列，$\therefore 2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}$，

$\therefore 2\sqrt{2+d}=1+\sqrt{3+3d}$，$\therefore d=2$，$\therefore a_n=2n-1(n\in N^*)$；　　………5分

(2) 由 (1) 得 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=n^2$，

$\therefore b_n=\dfrac{S_n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{(4n^2-1)+1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\times(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$，　　………8分

$\therefore T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{n}{4}+\dfrac{1}{8}[(1-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})]=\dfrac{n^2+n}{4n+2}$.　　………10分

18. 解：(1) 选择条件①：$\sin^2B+\sin^2C=\sin A(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin B\sin C+\sin A)$，

由题意可得 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin A\sin B\sin C$，

由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}bc\sin A$，　　………3分

由余弦定理 $b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$ 可得 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin A=\cos A$，$\therefore\tan A=\sqrt{3}$，

$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=60°$；　　………6分

选择条件②：$\cos^2A-\cos^2B+\sin^2C=\sin B\sin C$，

由题意可得 $1-\sin^2A-1+\sin^2B+\sin^2C=\sin B\sin C$，

即 $\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$，由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$，　　………3分

由余弦定理得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，

$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=60°$；　　………6分

(2) 由 (1) 得 $A=60°$，$\because BD=2CD$，$\therefore\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\overrightarrow{AD}^2=(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

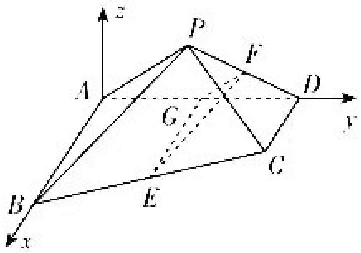
$=\dfrac{1}{9}c^2+\dfrac{4}{9}b^2+\dfrac{4}{9}bc\cos A=\dfrac{1}{9}c^2+\dfrac{4}{9}b^2+\dfrac{2}{9}bc=4$，　　………9分

$\therefore 36=c^2+4b^2+2bc\ge 4bc+2bc=6bc$，$\therefore bc\le 6$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc\le\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当$b=\sqrt{3},c=2\sqrt{3}$时，$\triangle ABC$的面积取最大值$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ·········12 分

19 解：（1）取$AD$的中点$G$，连接$EG,FG$，




$\because F$是$PD$的中点，$\therefore GF\parallel AP$，

$\because AP\subset$平面$PAB$，$FG\not\subset$平面$PAB$，

$\therefore GF\parallel$平面$PAB$，

同理可得$GE\parallel$平面$PAB$， ·········3 分

$\because GE\cap GF=G$，$GE\subset$平面$GEF$，$GF\subset$平面$GEF$，

$\therefore$平面$GEF\parallel$平面$PAB$，$\therefore EF\parallel$平面$PAB$； ·········6 分

（2）以点$A$为原点，$AB$，$AD$所在的直线分别为$x$轴，$y$轴，建立如图所示的空间直角坐标系，由题意可得$A(0,0,0)$，$B(4,0,0)$，$D(0,4,0)$，$C(2,4,0)$，

$\because PA=2$，直线$PA$与平面$ABCD$的所成角为$30°$，$\therefore$点$P$的竖坐标$z=1$，

又$\because\angle PAB=60°$，$\therefore$点$P$的横坐标$x=1$，纵坐标$y=\sqrt{2}$，$\therefore P(1,\sqrt{2},1)$， ·········8 分

设$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$是平面$PAB$的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{AB},\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{AP},\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}4x_1=0,\\ x_1+\sqrt{2}y_1+z_1=0,\end{cases}$ 令$y_1=1$，则$z_1=-\sqrt{2}$，$\therefore\vec{m}=(0,1,-\sqrt{2})$，

设$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$是平面$PAD$的一个法向量，则$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AD},\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AP},\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}4y_1=0,\\ x_1+\sqrt{2}y_1+z_1=0,\end{cases}$ 令$x_1=1$，则$z_1=-1$，$\therefore\vec{n}=(1,0,-1)$， ·········10 分

$\therefore\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$平面$PAB$与平面$PAD$夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ·········12 分

20. 解：（1）$\because\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=60$，$\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=1200$，$\therefore\bar{x}=\dfrac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}x_i=3$，$\bar{y}=\dfrac{1}{20}\sum\limits_{i=1}^{20}y_i=60$，

$\therefore b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}x_iy_i-20\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{20}x_i^2-20\bar{x}^2}=\dfrac{4400-20\times3\times60}{260-20\times3^2}=10$，$\therefore\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=60-10\times3=30$，

$\therefore y$关于$x$的线性经验回归方程为$\hat{y}=10x+30$； ·········3 分

（2）由（1）得$\hat{y}=10x+30$，$\because 45\le10x+30\le75$，$\therefore1.5\le x\le4.5$.

$\therefore$该新药中此药物成份含量$x$的取值范围为$[1.5,4.5]$； ·········5 分

（3）（i）设$A=$“随机抽取一件新药，是设备 A 生产的”，则$\bar{A}=$“随机抽取一件新药，是设备 B 生产的”，$B=$“随机抽取一件新药为不合格品”，

由题意得$P(A)=\dfrac{2}{3}$，$P(\bar{A})=\dfrac{1}{3}$，$P(B|A)=0.009$，$P(B|\bar{A})=0.006$，

$\therefore P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\dfrac{2}{3}\times 0.009+\dfrac{1}{3}\times 0.006=0.008$； ………8分

（ii）设$C=$"抽到一件不合格的新药，它是设备A生产的"，

则 $P(C)=P(A\mid B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{0.009}{0.008}=\dfrac{3}{4}$， ………10分

设$X$表示三件不合格新药来自设备A生产的件数，则 $X\sim B(3,\dfrac{3}{4})$，

所求事件的概率为 $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)=C_3^2\times(\dfrac{3}{4})^2\times\dfrac{1}{4}+C_3^3\times(\dfrac{3}{4})^3=\dfrac{27}{32}$. ………12分

21. 解：（1）由题意可得直线$AB$的方程为$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$，即$bx+ay-ab=0$，

$\because$直线$AB$与圆$x^2+y^2=\dfrac{12}{7}$相切，$\therefore r=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，$\therefore 7a^2b^2=12(a^2+b^2)$，

$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，$\therefore a^2=\dfrac{4}{3}b^2$，由$\begin{cases}7a^2b^2=12(a^2+b^2),\\ a^2=\dfrac{4}{3}b^2\end{cases}$可得$\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=3,\end{cases}$

$\therefore$椭圆$C$的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$； ………4分

（2）由题意可设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$D(x_1,y_3)$，$N(x_1,y_4)$，

由（1）得$A(2,0)$，$B(0,\sqrt{3})$，则直线$AB$的方程为$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}=1$，$\therefore y_3=\sqrt{3}(1-\dfrac{x_1}{2})$，

直线$AQ$的方程为$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，$\therefore y_4=\dfrac{(x_1-2)y_2}{x_2-2}$，

设直线$PQ$的方程为$y=k(x-2)+\sqrt{3}$，$k>0$，

由$\begin{cases}y=k(x-2)+\sqrt{3},\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$得$(3+4k^2)x^2+8k(\sqrt{3}-2k)x+16(k^2-\sqrt{3}k)=0$，

$\therefore x_1+x_2=\dfrac{8k(2k-\sqrt{3})}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{16(k^2-\sqrt{3}k)}{3+4k^2}$， ………8分

$\therefore y_1+y_4-2y_3=y_1+\dfrac{(x_1-2)y_2}{x_2-2}-\sqrt{3}(2-x_1)=\dfrac{(x_1-2)y_2+(x_2-2)y_1+\sqrt{3}(x_1-2)(x_2-2)}{x_2-2}$，

$\because (x_1-2)y_2+(x_2-2)y_1+\sqrt{3}(x_1-2)(x_2-2)=x_1y_2+x_2y_1-2(y_1+y_2)+\sqrt{3}(x_1-2)(x_2-2)$

$=x_1[k(x_2-2)+\sqrt{3}]+x_2[k(x_1-2)+\sqrt{3}]-2(y_1+y_2)+\sqrt{3}(x_1-2)(x_2-2)$

$=(2k+\sqrt{3})x_1x_2-(4k+\sqrt{3})(x_1+x_2)+8k$

$=\dfrac{1}{3+4k^2}[16(2k+\sqrt{3})(k^2-\sqrt{3}k)-8k(4k+\sqrt{3})(2k-\sqrt{3})+8k(3+4k^2)]=0$，

$\therefore y_1+y_4=2y_3$，$\therefore D$是$PN$中点. ………12分

22. 解：（1）由题意得$f'(x)=x-\dfrac{1}{x}-a\ln x$，$x>0$，$\therefore f''(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x}$，

①当$a\le 2$时，$f''(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x}\ge\dfrac{x^2-2x+1}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x}\ge 0$，$\therefore f'(x)$在$(0,+\infty)$上递增，

当$0<x<1$时，$f'(x)<f'(1)=0$，$\therefore f(x)$在$(0,1)$上递减，

当$x>1$时，$f'(x)>f'(1)=0$，$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上递增，

$\therefore f(x)$只有一个极值点$x=1$，此时不符合题意；　　　　………2分

②当$a>2$时，令$f''(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x}=0$，即$x^2-ax+1=0$，

则$m=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$和$n=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$是方程$f''(x)=0$的两个实数解，且$0<m<1<n$，

$\therefore f'(x)$在$(0,m)$和$(n,+\infty)$上递增，在$(m,n)$上递减，且$f'(1)=0$，　　　　………3分

$\because f'(m)>f'(1)=0$，$f'(e^{-2a})=e^{-2a}-e^{2a}+2a^2<1-(1+2a+2a^2)+2a^2=-2a<0$，

$\therefore \exists x_1\in(e^{-2a},m)$，$f'(x_1)=0$，$\therefore f'(x)$在$(0,m)$上存在唯一零点$x_1$，

$\because f'(n)<f'(1)=0$，$f'(e^{2a})=e^{2a}-e^{-2a}-2a^2>(1+2a+2a^2)-1-2a^2=2a>0$，

$\therefore \exists x_3\in(n,e^{2a})$，$f'(x_3)=0$，$\therefore f'(x)$在$(n,+\infty)$上存在唯一零点$x_3$，　　　　………5分

$\therefore f(x)$在$(0,x_1)$和$(1,x_3)$上递减，在$(x_1,1)$和$(x_3,+\infty)$上递增，记$x_2=1$，

$\therefore x_1,x_2,x_3$是$f(x)$的三个不同的极值点，且$0<x_1<x_2=1<x_3$，

综上，实数$a$的取值范围为$(2,+\infty)$；　　　　………6分

（2）由（1）得当$a>2$时，$f(x)$有三个不同的极值点$x_1,x_2,x_3$，且$0<x_1<x_2=1<x_3$，

①要证$x_1x_2x_3=1$，只需证$x_1x_3=1$，

$\because f'(\dfrac{1}{x})=\dfrac{1}{x}-x-a\ln\dfrac{1}{x}=-(x-\dfrac{1}{x}-a\ln x)=-f'(x)$，

$\therefore f'(\dfrac{1}{x_3})=-f'(x_3)=0$，$\because 0<\dfrac{1}{x_3}<1$，$\therefore \dfrac{1}{x_3}=x_1$，$\therefore x_1x_3=1$．　　　　………8分

②要证$x_1+x_2+x_3>3(a-1)$，只需证$x_1+x_3>3a-4$，

$\because f'(x_3)=x_3-\dfrac{1}{x_3}-a\ln x_3=0$，$\therefore a\ln x_3=x_3-\dfrac{1}{x_3}$，

只需证$(\dfrac{1}{x_3}+x_3)\ln x_3+4\ln x_3-3(x_3-\dfrac{1}{x_3})>0$，　　　　………10分

令$u(x)=(\dfrac{1}{x}+x)\ln x+4\ln x-3(x-\dfrac{1}{x})$，$x>1$，则$u'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}[\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}]$，

令$v(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}$，$x>1$，则$v'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

$\therefore v(x)>v(1)=0$，$\therefore u'(x)>u'(1)=0$，$\therefore u(x)>u(1)=0$，

$\therefore(\dfrac{1}{x_3}+x_3)\ln x_3+4\ln x_3-3(x_3-\dfrac{1}{x_3})>0$，即$x_1+x_2+x_3>3(a-1)$．　　　　………12分

**注：以上各题其它解法请酌情赋分.**

# 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。