2019年全国高三统一联合考试（文科数学）

一、选择题：（本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将正确的答案填涂在答题卡上。）

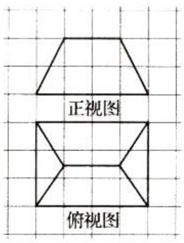
1. 设集合 $A=\{-3,-1,0,1\}$，$B=\{x\mid(x+2)(x-1)<0\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{x\mid -2<x<1\}$　　B.$\{-1,0\}$　　C.$\{-1,0,1\}$　　D.$\{-3,-1,0,1\}$

2. 复数 $\dfrac{2i}{1-i}$ 的虚部为

A.1　　B.i　　C.-1　　D.$-i$

3.《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著，书中有如下问题："今有刍甍，下广三丈，袤四丈，上袤二丈，无广，高二丈，问：积几何？"其意思为："今有底面为矩形的屋脊状的楔体，下底面宽 3 丈、长 4 丈，上棱长 2 丈，高 2 丈，问：它的体积是多少？"已知该楔体的正视图和俯视图如图中粗实线所示，则该楔体的侧视图的周长为



A.3 丈　　B.6 丈

C.8 丈　　D.$(5+\sqrt{13})$丈

4. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $\cos 2\alpha=-\dfrac{3}{5}$，则 $\tan\alpha=$

A.-2　　B.2　　C.$-\dfrac{1}{2}$　　D.$\dfrac{1}{2}$

5. 某省在新的高考改革方案中规定：每位考生的高考成绩是按照"语文、数学、英语"+"6 选 3"的模式设置的.其中，"6 选 3"是指从物理、化学、生物、思想政治、历史、地理 6 科中任选 3 科.某考生已经确定选一科物理，现在他还要从剩余的 5 科中再选 2 科，则在历史与地理两科中至少选一科的概率为

A.$\dfrac{3}{10}$　　B.$\dfrac{3}{5}$　　C.$\dfrac{7}{10}$　　D.$\dfrac{4}{5}$

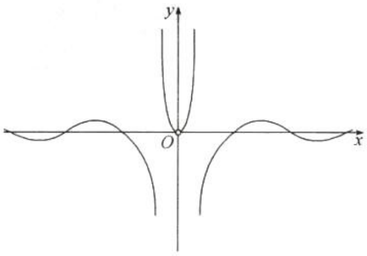
6. 函数 $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的最大值为

A.1　　B.$\sqrt{3}$　　C.2　　D.$\sqrt{3}+1$

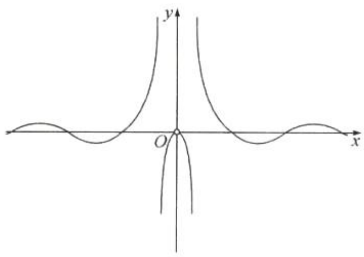
7. 下列函数中，其图像与函数 $y=\log_2 x$ 的图像关于直线 $y=1$ 对称的是

A.$y=\log_2\dfrac{2}{x}$　　B.$y=\log_2\dfrac{4}{x}$　　C.$y=\log_2(2x)$　　D.$y=\log_2(4x)$

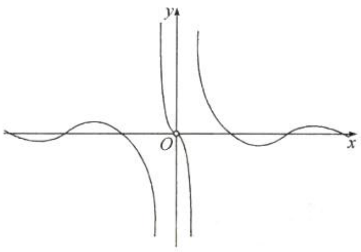
8.函数 $y=\dfrac{\sin x}{\ln|x|}$ 的图像大致为



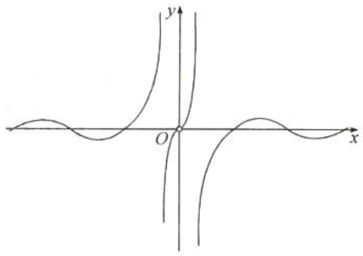
A



B



C



D

9.已知抛物线 $C:y^2=4x$，过焦点且倾斜角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的直线和 C 交于 A，B 两点，则过 A，B 两点且与 C 的准线相切的圆的方程为

A.$(x-1)^2+(y-1)^2=4$　　B.$(x-2)^2+(y-1)^2=9$

C.$(x-2)^2+(y-1)^2=16$　　D.$(x-3)^2+(y-2)^2=16$

10.已知△ABC 的三个内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 $a=1$，$a+b+c=3$，且 $c\sin A\cos B+a\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，则△$ABC$ 的面积为

A.$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 或 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B.$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　C.$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　D.$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

11.阿波罗尼斯是亚历山大时期的著名数学家，“阿波罗尼斯圆”是他的主要研究成果之一：若动点 P 与两定点 M，N 的距离之比为 $\lambda(\lambda>0$，且 $\lambda\neq1)$，则点 P 的轨迹就是圆.事实上，互换该定理中的部分题设和结论，命题依然成立.已知点 $M(2,0)$，点 P 为圆 $O:x^2+y^2=16$ 上的点，若存在 x 轴上的定点 $N(t,0)(t>4)$ 和常数 λ，对满足已知条件的点 P 均有 $|PM|=\lambda|PN|$，则 $\lambda=$

A.1　　B.$\dfrac{1}{2}$　　C.$\dfrac{1}{3}$　　D.$\dfrac{1}{4}$

12.已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内接于半球 O，且底面 $ABCD$ 落在半球的底面上，底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的四个顶点落在半球的球面上.若半球的半径为3，$AB=BC$，则该长方体体积的最大值为

A.$12\sqrt{3}$　　B.$6\sqrt{6}$　　C.48　　D.72

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13.已知向量 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，则 $k=$________.

14.近几年来移动支付越来越普遍，不同年龄段的人对移动支付的熟知程度不同.某学校兴趣小组为了了解移动支付在大众中的熟知度，要对15—75岁的人群进行随机抽样调查，可供选择的抽样方法有简单随机抽样、系统抽样和分层抽样，则最合适的抽样方法是________.

15.设实数 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-y-2\geqslant 0,\\ x-3y+2\leqslant 0,\\ x+y-6\leqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=\dfrac{|3x+4y+3|}{5}$ 的最大值为________.

16.设函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$，若对于 $\forall x\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right]$，$f(ax-1)>f(2)$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是________.

三、解答题：（本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（12分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，且 $a_1+a_4=0$，$a_2a_3=-1$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=3^{a_n+1}$，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，是否存在常数 λ，使得 λT_n-b_{n+1} 恒为定值？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由.

18.（12分）

2014年1月25日，中共中央办公厅、国务院办公厅专门发布了《关于创新机制扎实推进农村扶贫开发工作的意见》，对我国扶贫开发工作做出战略性创新部署，提出建立精准扶贫工作机制.某乡镇根据中央文件精神，在2014年通过精准识别确定建档立卡的贫困户共有473户，结合当地实际情况采取多项精准扶贫措施，从2015年至2018年该乡镇每年脱贫户数见下表：

年份	2015	2016	2017	2018
年份代码 x	1	2	3	4
脱贫户数 y	55	69	71	85

(1)根据2015—2018年的数据，求出 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

(2)利用(1)中求出的线性回归方程，试估计到2020年底该乡镇的473户贫困户能否全部脱贫.

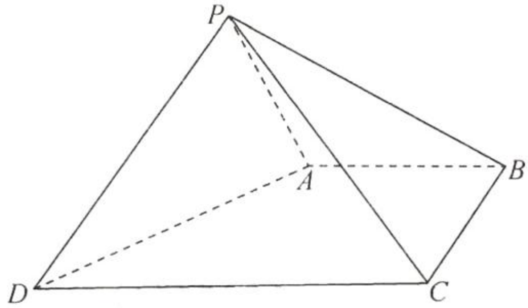
附：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\,\overline{x}\,\overline{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\,\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}$.

19.(12 分)

如图,四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为直角梯形,$AB\parallel DC$,$\angle ABC=90^\circ$,$\angle PAB=120^\circ$,$DC=PC=2$,$PA=AB=BC=1$.

(1)证明:平面 $PAB\perp$ 平面 PBC;

(2)求四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积.



20.(12 分)

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$F_1$,$F_2$ 分别为 E 的左、右焦点,过 E 的右焦点 F_2 作 x 轴的垂线交 E 于 A,B 两点,$\triangle F_1AB$ 的面积为$\sqrt{2}$.

(1)求椭圆 E 的方程;

(2)是否存在与 x 轴不垂直的直线 l 与 E 交于 C,D 两点,且弦 CD 的垂直平分线过 E 的右焦点 F_2? 若存在,求出直线 l 的方程;若不存在,请说明理由.

21.(12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点 $P(1,f(1))$处的切线方程;

(2)当 $a>1$ 时,求证:存在 $c\in\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$,使得对任意的 $x\in(c,1)$,恒有 $f(x)>ax(x-1)$.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分

22.[选修 4-4：坐标系与参数方程](10 分)

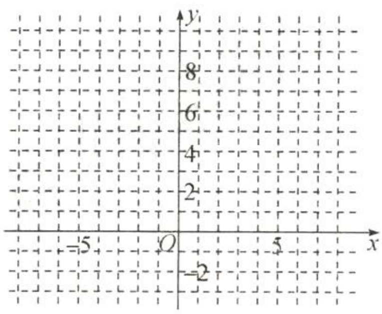
在平面直角坐标系 xOy 中，已知倾斜角为 α 的直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=-2+t\cos\alpha, \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta \end{cases}$（$\theta$ 为参数），点 P 的坐标为 $(-2,0)$.

(1) 当 $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ 时，设直线 l 与曲线 C 交于 A，B 两点，求 $|PA|\cdot|PB|$ 的值；

(2) 若点 Q 在曲线 C 上运动，点 M 在线段 PQ 上运动，且 $\overrightarrow{PM}=2\overrightarrow{MQ}$，求动点 M 的轨迹方程.

23.[选修 4-5：不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-1|+|2x|$.



(1) 在给出的平面直角坐标系中作出函数 $f(x)$ 的图像，并解不等式 $f(x)\geqslant 2$；

(2) 若不等式 $f(x)+|x-1|\geq 5-k$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求证：$k+\dfrac{6}{k}\geqslant 5$.

官方微信公众号：zizzsw
咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com
微信客服：zizzs2018

2019 年全国高三统一联合考试（文科数学）参考答案

一．选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	A	C	A	B	C	D	D	B	A

二、填空题

13. $\frac{5}{4}$　　14. 分层抽样　　15. 5　　16. $(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$

1.B 【解析】$B=\{x\mid-2<x<1\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0\}$. 选 B.

2.A 【解析】$\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i(1+i)}{2}=-1+i$，所以虚部为 1.选 A.

3.C 【解析】该楔体的侧视图是等腰三角形，底长为 3 丈，高为 2 丈，所以腰长为 $\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$(丈).所以侧视图的周长为 $3+2\times\frac{5}{2}=8$(丈).选 C.

4.A 【解析】由 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{3}{5}$，得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$.又 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\alpha=-2$.选 A.

5.C 【解析】5 选 2 共有 10 种结果.历史与地理至少选一科有两种情况：第一种情况为选一科的，结果有 6 种；第二种情况为两科都选的，结果有 1 种.因此，所求概率 $P=\frac{6+1}{10}=\frac{7}{10}$.选 C.

6.A 【解析】因为 $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x+\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)$ 的最大值为 1.选 A.

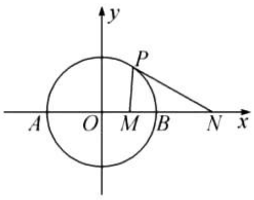
7.B 【解析】设 $P(x,y)$ 为所求函数图像上的任意一点，它关于直线 $y=1$ 对称的点是 $Q(x,2-y)$. 由题意知点 $Q(x,2-y)$ 在函数 $y=\log_2 x$ 的图像上，则 $2-y=\log_2 x$，即 $y=2-\log_2 x=\log_2 \dfrac{4}{x}$. 选 B.

8.C 【解析】易知函数为奇函数，排除选项 A，B；当 $x\in(0,1)$ 时，$y<0$，排除选项 D. 选 C.

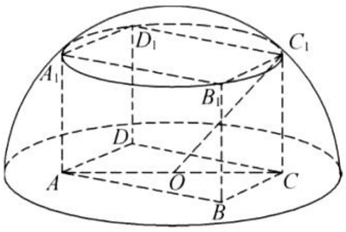
9.D 【解析】由抛物线的性质知以焦点弦为直径的圆与准线相切，所以弦 AB 为所求圆的直径. 又 $l_{AB}: y=x-1$，与抛物线 $y^2=4x$ 联立消去 y，得 $x^2-6x+1=0$. 设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，圆心坐标为 (a,b)，则 $\begin{cases}x_1+x_2=2a=6,\\ b=a-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\ b=2.\end{cases}$ 所以圆的半径为 $a+1=4$，即所求圆的方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$. 选 D.

10.D 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理及 $c\sin A\cos B+a\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，得 $\sin C\sin A\cos B+\sin A\cdot\sin B\cos C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A$. 因为在 $\triangle ABC$ 中 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin C\cos B+\sin B\cos C=\sin(B+C)=\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. 若 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，则 $a>b$，$a>c$，所以 $2a>b+c$，与已知 $a=1$，$b+c=2$ 矛盾，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$. 所以由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc=4-3bc=1$，解得 $bc=1$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. 选 D.

11.B 【解析】如图，由题意圆上的任意一点 P 均满足 $|PM|=\lambda|PN|$，可知 A,B 两点也满足该关系式.由 $A(-4,0),B(4,0),M(2,0),N(t,0)$，得 $\lambda=\dfrac{|AM|}{|AN|}=\dfrac{|BM|}{|BN|}=\dfrac{6}{4+t}=\dfrac{2}{t-4}$，解得 $t=8,\lambda=\dfrac{1}{2}$.选 B.



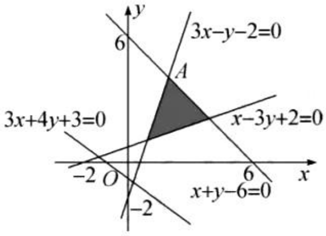
12.A 【解析】如图，设 $AB=BC=a,CC_1=h$，由长方体内接于半球，得 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+h^2=9$，则 $h^2=9-\dfrac{a^2}{2}$.令 $t=\dfrac{a^2}{2}$，则 $a^2=2t\,(0<t<9)$，所以 $V^2=(a^2h)^2=a^4h^2=4t^2(9-t)=-4t^3+36t^2$.令 $f(t)=-4t^3+36t^2\,(0<t<9)$，则 $f'(t)=-12t^2+72t=-12t(t-6)$，所以当 $t\in(0,6)$ 时，$f'(t)>0$，$f(t)$ 单调递增；当 $t\in(6,9)$ 时，$f'(t)<0$，$f(t)$ 单调递减.所以当 $t=6$ 时，$f(t)$ 最大，即长方体的体积 V 最大，此时 $a=2\sqrt{3}$，$V=12\sqrt{3}$.选 A.



13.$\frac{5}{4}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2+k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.又 $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,2)$，所以 $5+k(-6+2)=0$，解得 $k=\frac{5}{4}$.

14.分层抽样 【解析】不同年龄段的人对移动支付的熟知程度不同，因此应该按照年龄进行分层抽样.

15.5 【解析】所求目标函数的值可转化为可行域(包括边界)上的点到直线 $l:3x+4y+3=0$ 的距离，显然点 $A(2,4)$到直线 $l:3x+4y+3=0$ 的距离最大，且最大值为$\frac{|3\times2+4\times4+3|}{5}=5$.



16.$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup(3,+\infty)$ 【解析】$f(x)=x-\frac{1}{x}$ 为奇函数，且在区间$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$内均为增函数，

因为 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(2)$，

所以 $ax-1>2$ 或 $-\frac{1}{2}<ax-1<0$ 在 $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$上恒成立，即 $a>\frac{3}{x}$ 或 $\frac{1}{2x}<a<\frac{1}{x}$ 在 $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$上恒成立，所以 $a>3$ 或 $\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}$.

即实数 a 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup(3,+\infty)$.

三、解答题：

17.解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

则$\begin{cases}2a_1+3d=0,\\(a_1+d)(a_1+2d)=-1,\\d>0.\end{cases}$ ………………………… 2分

解得$a_1=-3,d=2$. ………………………………… 4分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-5(n\in\mathbf{N}^*)$.

………………………………………………………… 5分

(2)$b_n=3^{a_n+4}=3^{2n-1}=3\times3^{2(n-1)}$，所以数列$\{b_n\}$是以$b_1=3$为首项，$q=9$为公比的等比数列.

所以$T_n=\dfrac{3(1-9^n)}{1-9}=\dfrac{3}{8}(9^n-1)$. ………………… 8分

故$\lambda T_n-b_{n+1}=\dfrac{3\lambda}{8}(9^n-1)-3\times3^{2n}$

$=3\left(\dfrac{\lambda}{8}-1\right)9^n-\dfrac{3\lambda}{8}$. …………… 10分

所以当$\dfrac{\lambda}{8}-1=0$，即$\lambda=8$时，λT_n-b_{n+1}恒为定值-3.

………………………………………………………… 12分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

自主招生在线 www.zizzs.com

18.解：(1)因为 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4}{4}=2.5$，

$\bar{y}=\frac{55+69+71+85}{4}=70$，…………………………2分

$\sum_{i=1}^{4}x_iy_i=1\times55+2\times69+3\times71+4\times85=746$，

$\sum_{i=1}^{4}x_i^2=1+4+9+16=30$，…………………4分

所以 $\hat{b}=\frac{746-4\times70\times2.5}{30-4\times2.5^2}=9.2$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=70-9.2\times2.5=47$. …………………7分

因此，所求线性回归方程为 $\hat{y}=9.2x+47$. ………8分

(2)根据(1)中求得的线性回归方程可估算出

2019年脱贫户数：$\hat{y}_1=9.2\times5+47=93$，

2020年脱贫户数：$\hat{y}_2=9.2\times6+47\approx102$. ………10分

因为2015—2018年实际脱贫280户，2019年和2020年估计共脱贫195户，

所以 $280+195=475>473$，即到2020年底该乡镇的473户贫困户估计能够全部脱贫. ………………12分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

19.(1)**证明**:在$\triangle PAB$中,由$PA=AB=1$,$\angle PAB=120°$,得$PB=\sqrt{3}$.

因为$PC=2$,$BC=1$,$PB=\sqrt{3}$,所以$PB^2+BC^2=PC^2$,即$BC\perp PB$. …………………………………… 2分

因为$\angle ABC=90°$,所以$BC\perp AB$.因为$PB\cap AB=B$,所以$BC\perp$平面PAB. ………………………………… 4分

又$BC\subset$平面PBC,所以平面$PAB\perp$平面PBC.

……………………………………………………………… 6分

(2)**解**:在平面PAB内,过点P作$PE\perp AB$,交BA的延长线于点E.如图,由(1)知$BC\perp$平面PAB,

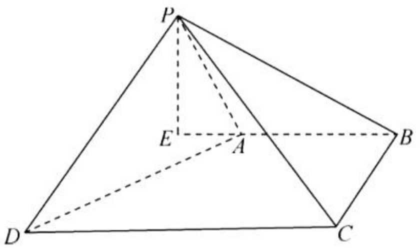
因为$BC\subset$平面$ABCD$,所以平面$PAB\perp$平面$ABCD$.

因为$PE\subset$平面PAB,平面$PAB\cap$平面$ABCD=AB$,$PE\perp AB$,所以$PE\perp$平面$ABCD$. ……………… 9分

因为在$\mathrm{Rt}\triangle PEA$中,$PA=1$,$\angle PAE=60°$,

所以$PE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………… 10分

因为底面$ABCD$是直角梯形,所以$V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times(1+2)\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. ………………………… 12分



20.解：(1)设 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，$S_{\triangle F_1AB}=\frac{1}{2}\times 2c\times|AB|=c\cdot\frac{2b^2}{a}=\sqrt{2}$，而$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，…………………… 2分

则 $b^2=1$，$a^2=2$， …………………………………… 4分

因此椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$. ……………… 5分

(2)假设存在直线 l 满足条件，设直线 $l:y=kx+m$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，线段 CD 的中点 $M(x_0,y_0)$. 将直线 l 的方程代入椭圆方程得$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，则 $2x_0=x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，所以 $x_0=-\frac{2km}{1+2k^2}$，又 $y_0=kx_0+m$，所以 $y_0=\frac{m}{1+2k^2}$，即 $M\left(-\frac{2km}{1+2k^2},\frac{m}{1+2k^2}\right)$. ………………………… 7分

若 CD 的垂直平分线过右焦点 $F_2(1,0)$，则 $k\cdot\frac{\frac{m}{1+2k^2}}{-\frac{2km}{1+2k^2}-1}=-1$，所以 $1+2k^2=-km$，……… 9分

即 $x_0=-\frac{2km}{1+2k^2}=2$，与 $x_0\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$矛盾.

故不存在这样的直线 l 满足条件. ……………… 12分

21.(1)**解**:由 $f(x)=x\ln x$,得 $f'(x)=\ln x+1$, …… 1分

所以 $f(1)=0, f'(1)=1$, …… 3分

故所求切线方程为 $y-0=1\times(x-1)$,即 $x-y-1=0$.

…… 4分

(2)**证明**:由 $f(x)>ax(x-1)$,得 $x\ln x>ax(x-1)$,

考虑到 $x>0$,可得 $\ln x>a(x-1)$.

设 $g(x)=\ln x-a(x-1)$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-a=-\frac{a\left(x-\frac{1}{a}\right)}{x}$.

当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时,$g'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$时,$g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 内是增函数,在区间 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$内是减函数. …… 6分

一方面,由 $g(x)$在区间$\left(\frac{1}{a},1\right)$内是减函数及 $g(1)=0$,得当 $x\in\left(\frac{1}{a},1\right)$时,$g(x)>0$. ① …… 8分

另一方面,$g(e^{-a})=\ln e^{-a}-a(e^{-a}-1)=-ae^{-a}<0$,则存在 $x_0\in\left(e^{-a},\frac{1}{a}\right)$,即 $x_0\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$,使得 $g(x_0)=0$.

…… 10分

又 $g(x)$在区间$\left(x_0,\frac{1}{a}\right)$内是增函数,

所以当 $x\in\left(x_0,\frac{1}{a}\right)$时,$g(x)>0$. ②

由①②,存在 $c\in\left(x_0,\frac{1}{a}\right)$,使 $g(x)>0$ 恒成立,

即存在 $c\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$,使得对任意的 $x\in(c,1)$,恒有 $f(x)>ax(x-1)$. …… 12分

22.解：(1)由 $\rho=2\sin\theta$ 得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$，即 $x^2+y^2-2y=0$，即得 $x^2+(y-1)^2=1$.

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1$.
………………………………………………………… 4 分

(2)因为过极点 O 与点 M 的直线方程为 $\theta=\beta$，

又极点 O 既在直线 OM 上又在曲线 C 上，

所以直线与曲线 C 相交所得弦长为 $\sqrt{3}$ 时即得 $\rho=\sqrt{3}$，

所以在 $\rho=2\sin\beta$ 中，令 $\rho=\sqrt{3}$ 得 $\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\beta=\frac{\pi}{3}$，或 $\beta=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………… 7 分

当 $\beta=\frac{\pi}{3}$ 时，因为曲线 C 的圆心的极坐标为 $C\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\angle MCO=\frac{2\pi}{3}$，所以曲线 C 被分成的两段弧长之比为 $2:1$ 或 $1:2$； …………………………………… 9 分

同理，当 $\beta=\frac{2\pi}{3}$ 时，由对称性可得曲线 C 被分成的两段弧长之比也为 $2:1$ 或 $1:2$.

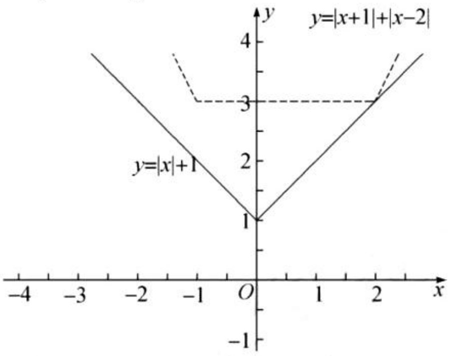
因此，直线 OM 将曲线 C 分成的两段弧长之比为 $2:1$ 或 $1:2$.…………………………………………… 10 分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

23.解:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=|x+1|+|x-2|=\begin{cases}-2x+1, x<-1,\\ 3, -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2x-1, x>2.\end{cases}$ …………………………………… 2 分

$g(x)=|x|+1=\begin{cases}x+1, x\geqslant 0,\\ -x+1, x<0.\end{cases}$ ……………… 3 分

作出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像如图所示.



从图中可知 $f(x)>g(x)$ 的解集为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}, 且\ x\neq 2\}$.
………………………………………………………………… 5 分

(2)因为对任意的 $x_1\in\mathbf{R}$,都有 $x_2\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$ 成立,

所以 $\{y\mid y=f(x)\}\subseteq\{y\mid y=g(x)\}$. …………… 6 分

又因为 $f(x)=|x+a|+|x-2a|\geqslant|x+a-(x-2a)|=3|a|$,$g(x)=|x|+1\geqslant 1$,……………………………… 8 分

所以 $3|a|\geqslant 1$,即得 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 或 $a\leqslant-\frac{1}{3}$.

所以实数 a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$.
………………………………………………………………… 10 分

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需获取更多试题及资料，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信扫一扫，快速关注