

2021—2022 学年度第二学期质量检测

高二数学试题

注意事项:

1. 本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟.
2. 答卷前,考生务必将自己的姓名,准考证号填涂在答题卡上.
3. 回答选择题时,选出每小题的答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上,写在试卷上无效.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $N = \{x | x^2 - 5x + 4 \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{2, 3\}$ B. $\{2, 3, 4\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{2, 3, 4, 5\}$

2. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(1, \sigma^2)$, 且 $P(1 < X \leq 3) = 0.4$, 则 $P(X > 3) =$

- A. 0.3 B. 0.3 C. 0.2 D. 0.1

3. 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 " $\frac{x-5}{x+2} < 0$ " 是 " $|x-2| < 1$ " 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

4. 在 8 件同一型号的产品中,有 3 件次品,5 件合格品,现不放回的从中依次抽取 2 件,在第一次抽到次品的条件下,第二次抽到次品的概率是

- A. $\frac{1}{28}$ B. $\frac{1}{10}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{2}{7}$

5. 已知随机变量 X 的概率分布为: $P(X = n) = \frac{\lambda}{n(n+1)}$ ($n = 1, 2, 3$), 其中 λ 是常数, 则 $P(1 \leq X < 3)$ 的值为

- A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{9}$

6. 若函数 $y = \sqrt{x^2 + 2x + a} + \ln(x + 2)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$, 则 $a =$

- A. -3 B. 3 C. 1 D. -1

7. 某中学为了更好地培养学生劳动实践能力,举办了一次劳动技术比赛.根据预赛成绩,最终确定由甲、乙等 5 名同学进入决赛,决出第 1 名到第 5 名的名次.决赛后甲和乙去询问成绩,回答者对甲说:“很遗憾,你没有得到冠军.”对乙说:“你和甲都不是最差的.”从这两个回答分析,甲、乙等 5 人的决赛名次可能有()种排列情况.

- A. 18 B. 36 C. 54 D. 72

8. 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,且 $f(x+1)$ 是偶函数,不等式 $f(3m+1) \geq f(x-2)$ 对任意的 $x \in [-1, 0]$ 恒成立,则实数 m 的取值范围是

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ B. $[-1, 1]$ C. $[0, \frac{1}{2}]$ D. $[-1, 0]$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分,有选错的得 0 分,部分选对的得 2 分.

9. 下列命题中正确的是

- A. 在回归分析中,成对样本数据的样本相关系数 r 的绝对值越大,成对样本数据的线性相关程度越强
B. 在回归分析中,可用决定系数 R^2 的值判断模型的拟合效果, R^2 越大,模型的拟合效果越好
C. 比较两个模型的拟合效果,可以比较残差平方和的大小,残差平方和越小的模型拟合效果越差
D. 对分类变量 X 与 Y ,统计量 χ^2 的值越大,则判断“ X 与 Y 有关系”的把握程度越大

10. 设 $a < b < 0$,则下列不等式中正确的是

- A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ C. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ D. $|a| < -b$

11. 设 M 、 N 是两个随机事件,则下列等式一定成立的是

- A. $P(M \cup N) = P(M) + P(N)$ B. $P(MN) = 1 - P(\overline{M} \overline{N})$
C. $P(MN) = P(M)P(N|M)$ D. $P(M|N) = \frac{P(N|M)P(M)}{P(N)}$

12. 定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,且 $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$.则对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,其中 $x_1 \neq x_2$,则

下列不等式中一定成立的是

- A. $f(e^{x_1}) < f(1)e^{x_1}$ B. $x_2 f\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) \geq \frac{x_2^2 + 1}{2} f(2)$
C. $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$ D. $f(x_1) + f(x_2) > \frac{x_2}{x_1} f(x_1) + \frac{x_1}{x_2} f(x_2)$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 若 $(2x + 1)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$,则 $a_3 =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}\cos x + x$,则函数 $f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为_____.

15. 甲、乙两同学玩掷骰子游戏,规则如下:

(1)甲、乙各抛掷质地均匀的骰子一次,甲得到的点数为 n_1 ,乙得到的点数为 n_2 ;

(2)若 $n_1 + n_2$ 的值能使二项式 $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^{n_1 + n_2}$ 的展开式中第5项的二项式系数最大,则甲胜,否则乙胜.

那么甲胜的概率为_____.

16. 已知 $x > 0, y > 0$,且满足 $e^{x+y} = (2x + y)e^{1-x}$ ($e \approx 2.71828$),则 $\frac{x+4y}{xy}$ 的最小值为_____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知 $(\sqrt{x} + \frac{a}{x})^n$ 展开式的二项式系数和为32,各项系数和为243.

(1)求 n 、 a 的值;

(2)若将展开式中的各项重新排列,求有理项互不相邻的概率.

18. (本小题满分 12 分)

2021年9月,山东省政府办公厅印发《山东省电动自行车管理办法》(以下简称《办法》),自2022年5月1日起施行.《办法》的第十九条第三款规定:驾乘电动自行车人员规范佩戴安全头盔.佩戴头盔是一项对家庭与社会负责的行为.某市为贯彻《办法》精神,加强对市民的安全教育,自2022年5月1日起,在该市某主干路口连续监控5周,每周抓拍到驾乘电动自行车人员未规范佩戴安全头盔的统计数据如下表:

周数	第1周	第2周	第3周	第4周	第5周
周数序号 x	1	2	3	4	5
未规范佩戴头盔人数 y	1150	1000	900	750	600

(1)请利用所给数据求未规范佩戴头盔人数 y 与周数序号 x 之间的经验回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$;

(2)利用(1)中建立的经验回归方程估算该路口第6周末规范佩戴头盔的人数.

参考数据: $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 11850$, $\sum_{i=1}^5 y_i = 4400$

参考公式: $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

19. (本小题满分 12 分)

孔子曰:温故而知新,可以为师矣.数学学科的学习也是如此,为了调查“数学成绩是否优秀”与“是否及时复习”之间的关系,某校志愿者从高二年级的所有学生中随机抽取60名学生进行问卷调查,得到如下样本数据:

	数学成绩优秀(人数)	数学成绩不优秀(人数)
及时复习(人数)	25	5
不及时复习(人数)	10	20

(1)试根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验,能否认为“数学成绩优秀”与“及时复习”有关系?

(2)在该样本中,用分层抽样的方法从数学成绩优秀的学生中抽取7人,再从这7人中随机抽取3人.设抽取3人中及时复习的人数为 X ,求 X 的分布列与数学期望.

临界值参考表:

α	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
χ_{α}	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(参考公式 $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n = a + b + c + d$)

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}(a-2)x^2 + (b-8)x + c-1 (x \in \mathbf{R})$.

(1) 如果函数 $f(x)$ 为幂函数, 试求实数 a 、 b 、 c 的值;

(2) 如果 $a > 0$ 、 $b > 0$, 且函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 3]$ 上单调递减, 试求 ab 的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

某工厂的某种产品成箱包装,每一箱 100 件.每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验,如检验出不合格品,则更换为合格品. 检验时,先从这箱产品中任取 10 件作检验,再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验,设每件产品是不合格品的概率都为 $x(0 < x < 1)$,且各件产品是否为不合格品相互独立.

(1)记 10 件产品中恰有 1 件不合格品的概率为 $f(x)$,求 $f(x)$ 的最大值点 x_0 ;

(2)现对一箱产品检验了 10 件,结果恰有 1 件不合格品,以(1)中确定的 x_0 作为 x 的值.已知每件产品的检验费用为 2.5 元,若有不合格品进入用户手中,则工厂要对每件不合格品支付 20 元的赔偿费用.

①若不对该箱余下的产品作检验,这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为 X ,求 $E(X)$;

②以检验费用与赔偿费用的和的期望值为决策依据,是否该对这箱余下的所有产品作检验?

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x \ln x - mx + 1$.

(1) 若 $f(x) \geq 0$, 求 m 的取值范围;

(2) 若方程 $f(x) = 0$ 有两个不相等的实数根, 并设这两个不相等的实数根为 a 、 b .

求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > 2$.