皖江名校联盟2022届高三第四次联考
理科数学

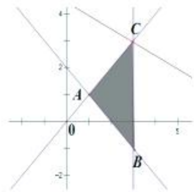
题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	C	D	C	B	A	C	D	B	B	C

1.【解析】$A=(0,e),B=[-1,2),\complement_R B=\{x\,|\,x<-1,或x\ge 2\}$，$A\cap(\complement_R B)=[2,e)$.

2.【解析】$z=\dfrac{3+4i}{2-i}=\dfrac{2+11i}{5}$，所以$|z|=\sqrt{\dfrac{4}{25}+\dfrac{121}{25}}=\sqrt{5}$. 或者根据复数模的性质.

$|z|=|\dfrac{3+4i}{2-i}|=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$.

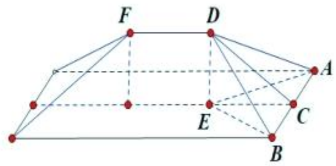
3.【解析】$S_7=7a_4=28\Rightarrow a_4=4$, 故$a_2=3$, 得$a_6=2a_4-a_2=5$.



4.【解析】如图，画出可行域，$z=4x+y$表示斜率为-4的一组平行线，当过点$C(3,3)$时，目标函数取得最大值$z_{\max}=4\times3+3=15$.

5.【解析】在$\triangle ABC$中$\cos A>\cos B\Leftrightarrow A<B\Leftrightarrow a<b\Leftrightarrow \sin A<\sin B$.

6.【解析】如图，不妨设$DE=1, AC=BC=CE=2$，



可得斜脊$AD=\sqrt{1+4+4}=3$, 因为矩形宽$AB=4$，

所以长为8，这样正脊$DF=8-2\times2=4$, 所以正脊与斜脊长度的比值为$4:3$即$\dfrac{4}{3}$.

7.【解析】因为$2\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{5}\sin(\alpha+\phi)=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，其中$\tan\phi=\dfrac{1}{2}$，

得$\sin(\alpha+\phi)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\alpha+\phi=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$或者$2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，$k\in Z$，

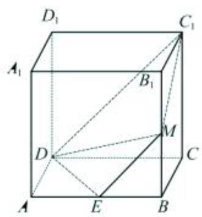
则$\tan\alpha=\tan(\dfrac{\pi}{4}-\phi)=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+1\times\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{3}$或者$\tan\alpha=\tan(\dfrac{3\pi}{4}-\phi)=\dfrac{-1-\frac{1}{2}}{1-1\times\frac{1}{2}}=-3$，

所以$\tan2\alpha=\dfrac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$或者$\tan2\alpha=\dfrac{2\times(-3)}{1-(-3)\times(-3)}=\dfrac{3}{4}$.

方法2：$2\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，两边平方得$\dfrac{4\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{10}{4}$，

因此$\dfrac{4\tan^2\alpha+4\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{5}{2}$，可得$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$或者$\tan\alpha=-3$，后同解法1.

8.【解析】如图，截面是等腰梯形 C_1MED，E 是 AB 的中点，



较小部分是三棱台 $BEM-CDC_1$，上底 $S_1=\frac{1}{2}\times2\times2=2$，

下底 $S_2=\frac{1}{2}\times4\times4=8$，所以 $V=\frac{1}{3}(2+8+\sqrt{2\times8})\times4=\frac{56}{3}$.

方法 2：较小部分可看成四棱锥 $M-BCDE$ 和三棱锥 $M-CC_1D$ 的组合，

$V=\frac{1}{3}\times(\frac{2+4}{2}\times4)\times2+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}\times4\times4)\times4=\frac{56}{3}$.

9.【解析】易见 $f(x)$ 在 R 上单调递增，且 $f(1)=1$，所以 $f(m)+f(n)=2$ 时，可设

$m<1<n$，$f(m)+f(n)=\frac{1}{2}(m+1)+1+\ln n=2$，得 $m=1-2\ln n(n>1)$

于是 $m+n=1-2\ln n+n$，令 $g(x)=x+1-2\ln x(x>1)$，$g'(x)=1-\frac{2}{x}$

所以 $g(x)$ 的极小值也是最小值，$g(2)=3-2\ln2$，故 $m+n$ 的最小值是 $3-2\ln2$。

10.【解析】设 $CD=x,BD=3x,\angle ADB=\theta$，由余弦定理可得

$b^2=9+x^2+6x\cos\theta,c^2=9+9x^2-18x\cos\theta$，消去 $\cos\theta$ 得 $3b^2+c^2=36+12x^2$，

又 $b^2+c^2-bc=16x^2$，联立消去 x 得 $144=9b^2+c^2+3bc\ge6bc+3bc=9bc$

所以 $bc\le16$，因此 $S=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}\le\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.

方法 2：$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2+\frac{9}{16}\overrightarrow{AC}^2+\frac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

因此 $9=\frac{1}{16}c^2+\frac{9}{16}b^2+\frac{3}{16}bc\ge2\times\frac{3}{16}bc+\frac{3}{16}bc=\frac{9}{16}bc$，得 $bc\le16$，后同解法 1.

11.【解析】(1) 当 $a=\frac{e}{2}$ 时 $f'(x)=e^x-ex\ge0$，$f(x)$ 没有极值点，结论（1）错误；

（2）考虑函数 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}$，$g'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 单调递减，

在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，唯一的极小值 $f(2)=\frac{e^2}{4}$。结合图像可知 $a=\frac{e^2}{4}$ 时 $f(x)$ 只有 2 个零点

（$x_1=2,x_2<0$），结论（2）错误。(3) $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 的唯一零点 x_0 是负数，

注意 $g(-1)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2},g(-\frac{1}{2})=\frac{4}{\sqrt{e}}>\frac{1}{2}$，所以结论（3）正确.

12.【解析】$f(x)=x^3-3x^2+3x=(x-1)^3+1$，关于 $(1,1)$ 中心对称，所以 $f(x)+f(2-x)=2$

所以 $f(\frac{1}{2021})+f(\frac{4041}{2021})=f(\frac{2}{2021})+f(\frac{4040}{2021})=\cdots=f(\frac{2020}{2021})+f(\frac{2022}{2021})=2$，

又 $f(1)=1$，所以 $\sum_{k=1}^{4041}f(\frac{k}{2021})=4041$.

【答案】2【解析】$a=\log_5 10, b=\log_4 10$，得 $\frac{1}{a}=\lg 5, \frac{1}{b}=\lg 4=2\lg 2$，所

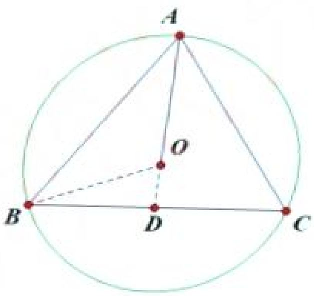
$+\frac{1}{b}=2\lg 5+2\lg 2=2$

【答案】$[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$（开区间，闭区间均对）

解析】$f(x)=\cos x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

$\in[0,\pi]\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}]$，令 $\frac{\pi}{2}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{3\pi}{2}$ 得 $x\in[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}]$。

5.【答案】$\frac{5}{8}$【解析】问题和三角形大小无关。如图，延长 AO 交 BC 于



D，设 $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AD}$，则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{k}\overrightarrow{AO}=\frac{x}{k}\overrightarrow{AB}+\frac{y}{k}\overrightarrow{AC}$.

因为 D 在 BC 上，所以 $\frac{x}{k}+\frac{y}{k}=1$，$k=x+y$，求 k 的最大值即可.

注意到 $k=\frac{|AO|}{|AD|}=\frac{|AO|}{|AO|+|OD|}$，而 $|AO|$ 是定值，故 $|OD|$ 最小即 $OD\perp BC$ 时，k 取最大值。

此时 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，$\angle BOD=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle A$，$\cos\angle BOD=\frac{OD}{OB}=\frac{3}{5}$.

$k=\frac{|AO|}{|AO|+|OD|}=\frac{5}{5+3}=\frac{5}{8}$.

16.【答案】$[-e,+\infty)$【解析】不等式 $\frac{e^x}{x}+ax-a\ln x\ge 0$ 等价于 $e^{x-\ln x}+a(x-\ln x)\ge 0$，令

$t=x-\ln x$，则 $t\ge 1$，问题转化为 $e^t+at\ge 0$，分离变量 $\frac{e^t}{t}\ge -a$，令 $g(t)=\frac{e^t}{t}$，则

$g'(t)=\frac{(t-1)}{t^2}e^t$，$g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，$g(t)\ge g(1)=e$，所以 $-a\le e\Rightarrow a\ge -e$，实数 a

的取值范围是 $[-e,+\infty)$.

解法 2：$\frac{e^x}{x}+ax-a\ln x\ge 0$ ... e^{x-1} a

……，所以不等式等价于 $(x-\ln x)(1+\frac{a}{e})\ge 0 \Leftrightarrow 1+\frac{a}{e}\ge 0 \Leftrightarrow a\ge -e$。

17.【解析】(1)

$$\cos 2B-\sin(B-\frac{\pi}{2})=\cos 2B+\cos B=2\cos^2 B-1+\cos B=0$$

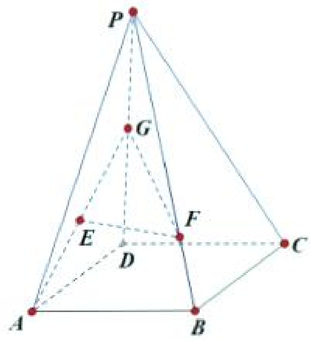
所以 $\cos B=\frac{1}{2}$ 或者 $\cos B=-1$（舍去），又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$. ………………5 分

(2) 由余弦定理 $b^2=7=a^2+3^2-6a\cos\frac{\pi}{3}$，所以 $a=2$（$a=1$ 时不是锐角三角形，舍去）。

所以 $\frac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin A}=\frac{3}{\sin C}=\frac{2+3}{\sin A+\sin C}$，

可得 $\sin A+\sin C=\frac{5}{\sqrt{7}}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{5\sqrt{21}}{14}$ ………………………………10 分

18.【解析】(1) 取 DG 中点 H，连接 EH,FH,BD，



由中位线定理得 $EH//AD$，所以 $EH//$平面$ABCD$

又因为 $\frac{PH}{HD}=\frac{PF}{FD}=3$，得 $HF//BD$.

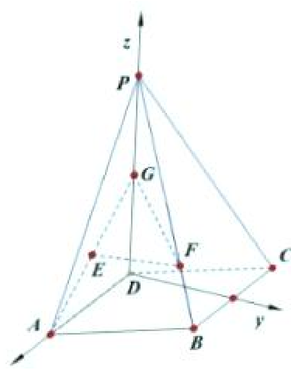
所以 $HF//$平面$ABCD$

因为 EH,HF 是平面 EFH 内的 2 条相交直线

所以 平面$EFH//$平面$ABCD$，

$EF\subset$平面EFH，因此 $EF//$平面 $ABCD$；………………………………6 分

(2) 由题设 $PD\perp$底面 $ABCD$，建立如图所示空间直角坐标系，



$A(1,0,0),P(0,0,2),G(0,0,1),B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0),F(\frac{3}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{1}{2})$

$\overrightarrow{GF}=(\frac{3}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8},-\frac{1}{2})$，$|\overrightarrow{GF}|=\sqrt{\frac{9}{64}+\frac{27}{64}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{4}$

……的一个法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，$|\vec{n}|=1$

2.【解析】(1) $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$

当 $a\le 0$ 时 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 没有极值点

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得 $x=a$，在 $(0,a)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上，

$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。所以函数 $f(x)$ 有极小值点 $x=a$，无极大值点. ………… 4 分

(2) 问题等价于 $h(x)=f(x)-g(x)=x-\dfrac{1}{x}-a\ln x$ 有 3 个不相等的零点，

函数的定义域是 $(0,+\infty)$，求导得 $h'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2}$，

记 $p(x)=x^2-ax+1$ ……………………………………………… 5 分

当 $a\le 0$ 时，在 $(0,+\infty)$ 上 $p(x)>0,h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，不可能有 3 个零点. …… 6 分

当 $0<a\le 2\Rightarrow\Delta=a^2-4\le 0$，

同样可得 $p(x)\ge 0,h'(x)\ge 0$ $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，不可能有 3 个零点.

当 $a>2$ 时，令 $p(x)=x^2-ax+1=0$，得 $x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$，

由韦达定理 $x_1x_2=1,x_1+x_2=a>2$，所以 $0<x_1<1<x_2$. ……………………… 7 分

在 $(0,x_1)$ 上 $p(x)>0,h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，

在 $(x_2,+\infty)$ $p(x)>0,h'(x)>0,h(x)$ 单调递增，

在 (x_1,x_2) 上 $p(x)<0,h'(x)<0,h(x)$ 单调递减，因为 $1\in(x_1,x_2),h(1)=0$，

所以 $h(x_1)>h(1)=0>h(x_2)$. ……………………………………………… 8 分

在区间 $(x_2,+\infty)$ 考察 $h(a^2)$ 的取值。

因为 $h(a^2)=a^2-\dfrac{1}{a^2}-a\ln a^2\ (a>2)$，

记 $q(a)=a^2-\dfrac{1}{a^2}-a\ln a^2\ (a>2)$

求导得 $q'(a)=2a+\dfrac{2}{a^3}-2(\ln a+1)=2(a-\ln a-1)\ldots$

这里证明一下，当 $a>2$ 时，$s(a)=\ldots$

因为$s'(a)=1-\dfrac{1}{a}>0,s(a)>s(1)=0$

所以$q(a)$在$(2,+\infty)$上单调递增，

$q(a)>q(2)=4-\dfrac{1}{4}-4\ln 2>0$即$h(a^2)>0$. . . . . 9 分

在$h(x)$单调递增的区间$(x_2,+\infty)$上，$h(x_2)<0,h(a^2)>0$，

所以存在唯一的$x_0\in(x_2,a^2)$使得$h(x_0)=0$. . . . . 10 分

注意到$h(x_0)+h(\dfrac{1}{x_0})=x_0-\dfrac{1}{x_0}-a\ln x_0+\dfrac{1}{x_0}-x_0-a\ln\dfrac{1}{x_0}=0$，所以$h(\dfrac{1}{x_0})=0$

由$x_0>x_2\Rightarrow\dfrac{1}{x_0}<\dfrac{1}{x_2}=x_1$，

所以在单调递增的区间$(0,x_1)$上有唯一的零点$\dfrac{1}{x_0}$. . . . . 11 分

综上所述，函数$f(x)$的图像与$g(x)=\dfrac{1}{x}$的图像有 3 个不同的交点时，

实数a的取值范围是$(2,+\infty)$. . . . . 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。