三校联考（二模）理科数学参考答案 2021.4.7

一．选择题：ACACC　CBACD　DD

二．填空题：

13. $\frac{1}{2}$　　14. 145　　15. 4　　16. 甲、乙、丙

三．解答题：

17. 解：（Ⅰ）设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>1)$，前n项和为S_n．

则$6a_3=4a_2+2a_4$，整理得$q^2-3q+2=0$，解得$q=1$（舍）或$q=2$ ……………2 分

$S_6=\frac{a_1(2^6-1)}{2-1}=63a_1=126$，解得$a_1=2$．$\therefore a_n=2^n(n\in N^*)$ ……………4 分

（Ⅱ）$n\geq 2$时，$b_n=b_{n-1}+\log_2 a_n$，

即$b_n-b_{n-1}=n$，则

$b_{n-1}-b_{n-2}=n-1,$

……

$b_2-b_1=2$

累加得：$b_n-b_1=\frac{(n+2)(n-1)}{2}=\frac{n^2+n-2}{2}$，$\because b_1=1$，$\therefore b_n=\frac{n^2+n}{2}(n\geq 2)$． …………8 分

经检验，当$n=1$时，$b_1=1$符合上式．$\therefore b_n=\frac{n^2+n}{2}$ ……………9 分

$\therefore \frac{1}{b_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，则$T_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{2n}{n+1}<2$ ………12 分

18.解：(1) 由频率分布表可知：

$$\bar{x}=\frac{55\times3+65\times12+75\times72+85\times8+95\times5}{100}=\frac{7500}{100}=75$$

$$S^2=\frac{(55-75)^2\times3+(65-75)^2\times12+(75-75)^2\times72+(85-75)^2\times8+(95-75)^2\times5}{100}=52$$

$\therefore \bar{x}=75$　　$S^2=52$ 。。。。。。。。。。。 4 分（每个 2 分）

(2) 由一直和 (1) 可知：$X\sim N(75,52)$

$\because \sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{S^2}=\sqrt{52}\approx 7.2$

$\therefore P(67.8<X<89.4)=P(\mu-\sigma<X<\mu+2\sigma)$

$$=\frac{1}{2}P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)+\frac{1}{2}P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)$$

$$=\frac{1}{2}\times 0.6827+\frac{1}{2}\times 0.9545=0.8186$$

$\therefore P(67.8<X<89.4)$为0.8186.

………… 8分

(3) 由已知条件可得：2×2列联表如下：

	满意	不满意	合计
男性	85	15	100
女性	80	20	100
合计	165	35	200

……… 10分

$$\therefore k=\frac{200\times(85\times 20-80\times 15)^2}{100\times 100\times 165\times 35}=\frac{200}{231}\approx 0.866$$

$\because k\approx 0.866<6.635$ ……… 11分

$\therefore$没有99%的把握认为是否满意与性别有关.

……… 12分

19.

(1) 图略, ……… 2分

$\frac{MS}{MA}=1$ ……… 4分

(2)证明：Q D,C分别为SA,SB中点

$\therefore CD//AB$

Q $AS\perp AB$

$\therefore CD\perp SD$

Q 面$SCD\perp$面$ABCD$

面SCD I 面$ABCD=CD$

$SD\perp CD$

$SD\subset$面SCD

$\therefore SD\perp$面$ABCD$

Q $CD,AD\subset$面$ABCD$

$\therefore SD\perp CD, SD\perp AD$

又Q $CD\perp AD$

$\therefore DA, DC, DS$三条棱两两互相垂直 ………… 6分

如图所示分别以射线 DA, DC, DS 的方向为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系 $D-xyz$

设 $AD = CD = 1$，则 $A(1,0,0), C(0,1,0), S(0,0,1), B(1,2,0)$ ………… 7分

$\therefore \vec{B} = (1,2,-1), \overrightarrow{AB} = (0,2,0), \overrightarrow{CB} = (1,1,0)$

设平面 SAB，平面 SBC 的法向量分别为 $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

则$\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \end{cases}$ 则$\begin{cases} y_1 = 0 \\ x_1 + 2y_1 - z_1 = 0 \end{cases}$，取 $x_1 = 1$，则 $\vec{u} = (1,0,1)$ ………… 9分

$\begin{cases} \vec{v} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases}$ 则$\begin{cases} x_2 + 2y_2 - z_2 = 0 \\ x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$，取 $x_2 = 1$，则 $\vec{v} = (1,-1,-1)$ ………… 11分

$\therefore \cos\left\langle \vec{u}, \vec{v} \right\rangle = \dfrac{\vec{u}, \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{1-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 0$

$\therefore$ 平面$SBA \perp$ 平面SBC ………… 12分

20（1）设 P 点坐标为 (x, y)，则 $k_{PM} \cdot k_{PN} = -\dfrac{3}{4}$

$\therefore \dfrac{y - \frac{3}{2}}{x-1} \cdot \dfrac{y + \frac{3}{2}}{x+1} = -\dfrac{3}{4}$ ………… 2分

$\therefore 4\left(y - \dfrac{3}{2}\right)\left(y + \dfrac{3}{2}\right) + 3(x-1)(x+1) = 0$

$\therefore \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ $\therefore$ 曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 1)$ ………… 4分

(2) 设 $A(x, y)$ $B(x_2, y_2)$，设直线 AB 为 $x = my + n$

代入 $3x^2 + 4y^2 = 12$ 得 $(3m^2 + 4)y^2 + 6mny + 3n^2 - 12 = 0$

$\Delta = 36m^2n^2 - 4(3n^2 - 12)(3m^2 + 4) = 48(3m^2 + 4 - n^2) > 0$ ………… 6分

$|AT|^2 + |BT|^2 = (m^2 + 1)(y_1^2 + y_2^2) = (m^2 + 1)[(y_1 + y_2)^2 - 2y_1y_2]$

$= (m^2 + 1)[(\dfrac{-6mn}{3m^2 + 4})^2 - 2\dfrac{3n^2 - 12}{3m^2 + 4}] = 6\dfrac{(m^2 + 1)}{(3m^2 + 4)^2}[(3m^2 - 4)n^2 + 4(3m^2 + 4)]$

………… 10分

为定值，则 $3m^2 - 4 = 0, m = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}, k_{AB} = \dfrac{1}{m} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ………… 12分

21.（1）由已知：$f'(x)=e^x-e^{-x}-2x$ ………… 1分

$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\ge 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$ $\therefore f'(x)$ 在 R 上递增， ………… 2分

当 $x<0, f'(x)\le f'(0)=0, f(x)$ 递减，

当 $x>0, f'(x)\ge f'(0)=0, f(x)$ 递增

$\therefore f(x)$ 增区间是 $(0,+\infty)$，减区间是 $(-\infty,0)$ ………… 4分

(2) 当 $x>0$， $f'(x)=e^x-e^{-x}-ax$

① 当 $a\le 2$ 时，由（1）知 $f'(x)\ge e^x-e^{-x}-2x>0$， $f(x)$在$(0,+\infty)$递增， $f(x)$ 无极值点 ………… 5分

②当 $a>2$ 时，

令 $h(x)=e^x-e^{-x}-ax$， $h'(x)=e^x+e^{-x}-a$ $(x>0)$

当 $x\in(0,\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})$ 时， $e^x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$， $h'(x)<0$ $\therefore h(x)$递减 ………… 6分

$h(x)<h(0)=0$ $\therefore f'(x)<0$

当 $x\in\left(\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$， $e^x>\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}, h'(x)>0$ $\therefore h(x)$递增 ………… 7分

（下证引理: $e^x>x^2$，令 $u(x)=x^2\cdot e^{-x}$， $u'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$

当 $0<x<2, u'(x)>0, u(x)$递增，当 $x>2, u'(x)<0, u(x)$递减

$u(x)\le u(2)=\dfrac{4}{e^2}<1$ $\therefore e^x>x^2$, 证毕） ………… 8分

$h(a+1)=e^{a+1}-e^{-a-1}-a(a+1)>(a+1)^2-1-a(a+1)=a>0$，又 $h(\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2})<0$

………… 9分

$\therefore h(x)$在$(\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty)$ 上有唯一零点 t ………… 10分

当 $\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}<x<t$， $h(x)<h(t)=0$ $\therefore f'(x)<0$ $\therefore f(x)$递减

当 $x>t, h(x)>h(t)=0$， $f'(x)>0$ $f(x)$ 递增

$\therefore f(x)$ 有唯一极小值点 t ………… 11分

综上所述，a 的取值范围是 $(2,+\infty)$ ◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦◦ 12 分

22：（1）曲线 C_1：$\begin{cases}x=2+2cos\theta\\ y=2sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数）可化为直角坐标方程：$(x-2)^2+y^2=4$，

即 $x^2+y^2-4x=0$，由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，可得 $\rho^2-4\rho\cos\theta=0$，

所以曲线 C_1 的极坐标方程为：$\rho=4\cos\theta$ ……2 分

曲线 C_2：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta$，即 $\rho^2=2\sqrt{3}\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta$，

由 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，可得 C_2 的直角坐标方程为：

$\left(x-\sqrt{3}\right)^2+\left(y+1\right)^2=4$. ……5 分

（2）直线 l 的直角坐标方程为 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，

所以 l 的极坐标方程为 $\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

联立 $\begin{cases}\theta=-\dfrac{\pi}{6}\text{或}\theta=\dfrac{5\pi}{6}\\ \rho=4\cos\theta\end{cases}$，得 $A(2\sqrt{3},-\dfrac{\pi}{6})$ ……7 分

联立 $\begin{cases}\theta=-\dfrac{\pi}{6}\text{或}\theta=\dfrac{5\pi}{6}\\ \rho=2\sqrt{3}\cos\theta-2\sin\theta\end{cases}$，得 $B(4,-\dfrac{\pi}{6})$， ……9 分

$|AB|=|\rho_A-\rho_B|=4-2\sqrt{3}$. ……10 分

23.解：（Ⅰ）Q $f(x)=|x+2|-|x-1|$

①当 $x\le-2$ 时，$f(x)=-x-2+(x-1)=-3\le x$，$\therefore x\ge-3$，$\because x\le-2$，$\therefore -3\le x\le-2$；…1 分

②当 $-2<x<1$ 时，$f(x)=x+2+(x-1)=2x+1\le x$，$\therefore -2<x\le-1$； …2 分

③当 $x\ge1$ 时，$f(x)=x+2-(x-1)=3\le x$， Q $x\ge3$； …3 分

综上知不等式 $f(x)\le x$ 的解集为 $[-3,-1]$U$[3,+\infty)$. …5 分

（Ⅱ）由已知，$f(x)=\begin{cases}-3, & x\le-2\\ 2x+1, & -2<x<1\\ 3, & x\ge1\end{cases}$，$(-2,1)$ 是增函数 …6 分

所以 $f(x)_{\max}=3$， …7 分

$\therefore m+2n=3$，m>0,n>0

则 $\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{3}\cdot(\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n})(m+2n)=\dfrac{1}{3}(4+\dfrac{4n}{m}+\dfrac{m}{n})\geq\dfrac{1}{3}\times(4+2\sqrt{\dfrac{4n}{m}\cdot\dfrac{m}{n}})=\dfrac{8}{3}$， ……… 9 分

当且仅当 $\dfrac{4n}{m}=\dfrac{m}{n}$，即 $m^2=4n^2$，即 $m=2n=\dfrac{3}{2},n=\dfrac{3}{4}$ 时，$\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}$ 取得最小值 $\dfrac{8}{3}$. 分