长沙市一中2022届高三月考试卷(一)

数　学

时量：120分钟　　满分：150分

得分______

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1. 已知复数 $z_1=a-i$，$z_2=2+i$（i为虚数单位），若 z_1z_2 是纯虚数，则实数 $a=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -2　　D. 3

2. 若 $\log_a b<0$（$a>0$ 且 $a\neq1$），$2^{b-a}>1$，则

A. $a>1$，$b>1$　　B. $a>1$，$0<b<1$

C. $0<a<1$，$b>1$　　D. $0<a<1$，$0<b<1$

3. 已知圆 O：$x^2+y^2=25$，则过圆 O 上一点 $A(3,4)$ 的切线方程为

A. $3x+4y-25=0$　　B. $4x+3y-24=0$

C. $3x-4y+7=0$　　D. $4x-3y=0$

4. "平均增长量"是指一段时间内某一数据指标增长量的平均值，其计算方法是将每一期增长量相加后，除以期数，即 $\frac{\sum_{i=2}^{n}(a_i-a_{i-1})}{n-1}$. 国内生产总值（GDP）被公认为是衡量国家经济状况的最佳指标，下表是我国2015—2019年GDP数据：

年份	2015	2016	2017	2018	2019
国内生产总值/万亿	68.89	74.64	83.20	91.93	99.09

根据表中数据，2015—2019年我国GDP的平均增长量为

A. 5.03万亿　　B. 6.04万亿

C. 7.55万亿　　D. 10.07万亿

5. 在△ABC中，O为中线AM上的中点，若$AM=2$，则$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$等于

A. 1　　B. -1

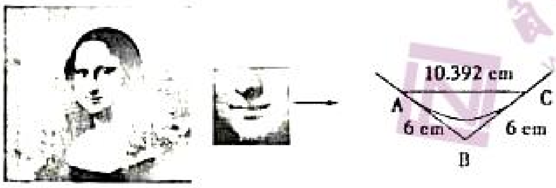
C. 2　　D. -2

6. 某校开设A类选修课4门，B类选修课3门，每位同学从中选3门. 若要求两类课程中都至少选一门，则不同的选法共有

A. 18种　　B. 24种

C. 30种　　D. 36种

7. 达芬奇的经典之作《蒙娜丽莎》举世闻名. 如图,画中女子神秘的微笑,数百年来让无数观赏者入迷. 某业余爱好者对《蒙娜丽莎》的缩小影像作品进行了测绘,将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧,在嘴角 A,C 处作圆弧的切线,两条切线交于 B 点,测得如下数据:$AB=BC=6$ cm,$AC=10.392$ cm. 根据测量得到的结果推算:将《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角大约等于$\left(\text{注}:\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866\right)$



A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

8. 已知数列$\{a_n\}$,满足 $a_1=a$ 且 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, n=2k-1, k\in N^* \\ 2a_n, n=2k, k\in N^*\end{cases}$,设 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $S_{2020}=1$,则 a 的值为

A. $\frac{1}{3030}$　　B. $\frac{1}{2020}$　　C. $\frac{1}{1515}$　　D. 1

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 已知集合 $M=\{x|x^2-3x+2\leqslant 0\}$,$N=\{x|x>-1\}$,则

A. $N\subseteq M$　　B. $M\subseteq N$

C. $M\cap N\neq\varnothing$　　D. $M\cup \complement_{R}N=R$

10. 若将函数 $f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{8}$个单位长度,得到函数 $g(x)$的图象,则下列说法正确的是

A. $g(x)$的最小正周期为 π

B. $g(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减

C. 函数 $g(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$对称

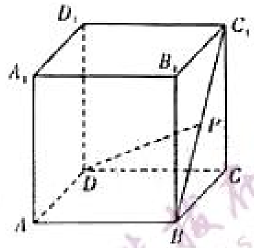
D. $g(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$上的最小值为$-\frac{1}{2}$

11. 已知实数 x,y,z 满足 $z\cdot\ln x=z\cdot e^y=1$,则下列关系式中可能成立的是

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $z>x>y$　　D. $z>y>x$

12. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，P 为线段 BC_1 上的动点，下列说法正确的是



A. 对任意点 P，DP∥平面 AB_1D_1

B. 三棱锥 $P-A_1DD_1$ 的体积为$\frac{1}{3}$

C. 线段 DP 长度的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$

D. 存在点 P，使得 DP 与平面 ADD_1A_1 所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 函数 $f(x)=(x+2)\ln x$ 的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程为________.

14. 已知圆柱的高为 1，它的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上，则该圆柱的体积为________.

15. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，P 为 C 的右支上一点，且 $|PF_2|=|F_1F_2|$，则$\triangle PF_1F_2$ 的面积等于________.

16. 甲箱中有 5 个红球，2 个白球和 3 个黑球，乙箱中有 4 个红球，3 个白球和 3 个黑球. 先从甲箱中随机取出一球放入乙箱中，分别以 A_1，A_2，A_3 表示由甲箱中取出的是红球，白球和黑球的事件；再从乙箱中随机取出一球，以 B 表示由乙箱中取出的球是红球的事件，则 $P(B|A_1)=$________. $P(B)=$________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $a\sin B+\sqrt{3}b\cos A=0$.

(1)求角 A 的大小；

(2)设 D 为 BC 边上一点，且 $AD\perp AC$，若 $a=2\sqrt{7}$，$b=2$. 求$\triangle ABD$ 的面积.

18.（本小题满分 12 分）

携号转网，也称作号码携带、移机不改号，即无需改变自己的手机号码，就能转换运营商，并享受其提供的各种服务. 2019 年 11 月 27 日，工信部宣布携号转网在全国范围正式启动. 某运营商为提质量保客户，从运营系统中选出 300 名客户，对业务水平和服务水平的评价进行统计，其中业务水平的满意率为$\frac{13}{15}$，服务水平的满意率为$\frac{2}{3}$，对业务水平和服务水平都满意的客户有 180 人.

(1)完成下面 2×2 列联表，并分析是否有 97.5%的把握认为业务水平与服务水平有关；

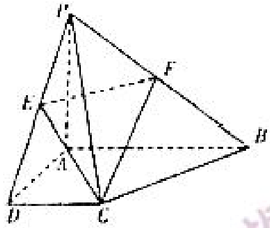
	对服务水平满意人数	对服务水平不满意人数	合计
对业务水平满意人数			
对业务水平不满意人数			
合计			

(2)为进一步提高服务质量，在选出的对服务水平不满意的客户中，抽取 2 名征求改进意见，用 X 表示对业务水平不满意的人数，求 X 的分布列与期望.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.（本小题满分 12 分）



如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle CDA=\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=2DC=2\sqrt{2}$，$E$，$F$ 分别为 PD，PB 的中点．

(1)求证：$CF//$平面 PAD；

(2)若截面 CEF 与底面 $ABCD$ 所成锐二面角为 $\frac{\pi}{4}$，求 PA 的长度．

20.（本小题满分 12 分）

已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，a_1，a_2，a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数，且 a_1，a_2，a_3 中的任何两个数都不在下表的同一列，且 $a_1\in\{1,3\}$．

	第一列	第二列	第三列
第一行			
第二行	4	6	9
第三行	12	8	7

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=(-1)^{n+1}a_n^2$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=3(x-1)e^x-\frac{3}{2}ax^2$，其中实数 $a\in(0,+\infty)$．

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $a>\frac{1}{2}$ 时，证明：关于 x 的方程 $f(x)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}ax^2-x^3$ 有唯一实数解．

22.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 C_1：$y^2=2px(p>0)$ 的准线与半椭圆 C_2：$\frac{x^2}{4}+y^2=1(x\leqslant 0)$ 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=\sqrt{3}$．

(1)求抛物线 C_1 的方程；

(2)若点 P 是半椭圆 C_2 上一动点，过点 P 作抛物线 C_1 的两条切线，切点分别为 C，D，求△PCD 面积的取值范围．

长沙市一中2022届高三月考试卷(一)

数学参考答案

一、二、选择题

1. A 【解析】由已 $z_1z_2=(a-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=(2a+1)+(a-2)\mathrm{i}$ 是纯虚数，所以 $2a+1=0$ 且 $a-2\neq0$，可得 $a=-\dfrac{1}{2}$，故选 A.

2. C 【解析】因为 $2^{b^2-b}>1$，所以 $b^2-b>0$，因为 $b>0$，所以 $b>1$，因为 $\log_a b<0$，$b>1$，所以 $0<a<1$，故选 C.

3. A 【解析】圆 $x^2+y^2=25$ 的圆心为 $O(0,0)$，则直线 AO 的斜率 $k_{OA}=\dfrac{4}{3}$，故切线的斜率 $k=-\dfrac{1}{k_{OA}}=-\dfrac{3}{4}$，所以切线方程为 $y-4=-\dfrac{3}{4}(x-3)$，化简得：$3x+4y-25=0$，故选 A.

4. C 【解析】由题意得，2015—2019 年我国 GDP 的平均增长量为：

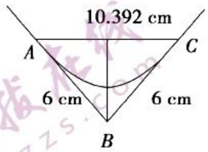
$$\frac{(74.64-68.89)+(83.20-74.64)+(91.93-83.20)+(99.09-91.93)}{5-1}=\frac{(99.09-68.89)}{4}=7.55\text{ 万亿}.$$

故选 C.

5. D 【解析】因为 O 为中线 AM 上的中点，$AM=2$，所以 $AO=OM=1$，且 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 的夹角为 π，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{OA}\cdot2\overrightarrow{OM}=2|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OM}|\cos\pi=-2$. 故选 D.

6. C 【解析】根据题意，分两种情况讨论：①若从 A 类课程中选 1 门，从 B 类课程中选 2 门，有 $C_4^1\cdot C_3^2=12$(种)选法；②若从 A 类课程中选 2 门，从 B 类课程中选 1 门，有 $C_4^2\cdot C_3^1=18$(种)选法. 综上，两类课程中都至少选一门的选法有 $12+18=30$(种). 故选 C.

7. B 【解析】∵$AB=BC=6$ cm，$AC=10.392$ cm. 设 $\angle ABC=2\theta$，所以 $\sin\theta=\dfrac{\frac{10.392}{2}}{6}=0.866\approx\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\text{因为}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx0.866\right)$，又由题意 θ 必为锐角，可得 $\theta\approx\dfrac{\pi}{3}$，设《蒙娜丽莎》中女子的嘴唇视作的圆弧对应的圆心角为 α. 则 $\alpha+2\theta=\pi$，得 $\alpha=\pi-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{3}$. 故选 B.

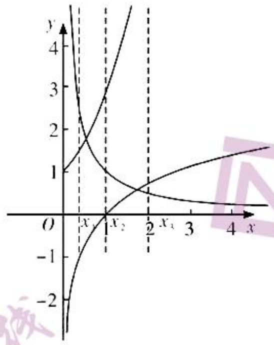


8. C 【解析】由 $a_1=a$ 且 $a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, n=2k-1, k\in\mathbf{N}^*,\\ 2a_n, n=2k, k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 得 $a_2=\dfrac{1}{2}a$，$a_3=a$，$a_4=\dfrac{1}{2}a$，…，所以，$a_n=\begin{cases}a, n=2k-1, k\in\mathbf{N}^*,\\ \frac{1}{2}a, n=2k, k\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ $S_{2020}=1010a+1010\times\dfrac{1}{2}a=1515a$，又 $S_{2020}=1$，所以 $1515a=1$，解得 $a=\dfrac{1}{1515}$，故选 C.

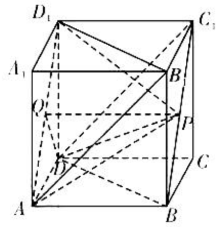
9. BC 【解析】因为 $M=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant0\}$，解不等式得 $M=\{x\mid1\leqslant x\leqslant2\}$，且 $N=\{x\mid x>-1\}$，所以 $M\subseteq N$，$M\cap N=\{x\mid1\leqslant x\leqslant2\}\neq\varnothing$，$M\cup\complement_{\mathbf{R}}N=\{x\mid x\leqslant-1\text{ 或 }1\leqslant x\leqslant2\}\neq\mathbf{R}$. 故选 BC.

10. ACD 【解析】$g(x)=\cos\left[2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)+\dfrac{\pi}{12}\right]=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$g(x)$ 的最小正周期为 π，选项 A 正确；当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right]$ 时，故 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有增有减，选项 B 错误；因为 $g\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=0$，所以 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\dfrac{\pi}{12},0\right)$ 对称，选项 C 正确；当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 时，$2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right]$，且当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$，即 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 时，$g(x)$ 取最小值 $-\dfrac{1}{2}$，选项 D 正确. 故选 ACD.

11. ABC 【解析】设 $\ln x=e^y=\frac{1}{z}=k, k>0$, 则 $x=e^k, y=\ln k, z=\frac{1}{k}$, 画出函数图象, 如图所示: 当 $k=x_1$ 时, $z>x>y$; 当 $k=x_2$ 时, $x>z>y$; 当 $k=x_3$ 时, $x>y>z$; 故选 ABC.



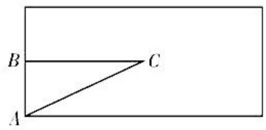
12. AC 【解析】由题可知, 正方体的面对角线长度为 $\sqrt{2}$. 对于 A, 分别连接 C_1D、BD、B_1D_1、AB_1、AD_1, 易得平面 C_1DB∥平面 AB_1D_1, $DP\subset$ 平面 C_1DB, 故对任意点 P, DP∥平面 AB_1D_1, 故 A 正确; 对于 B, 分别连接 PA、PD_1, 无论点 P 在哪个位置, 三棱锥 $P-A_1DD_1$ 的高均为 1, 底面 A_1DD_1 的面积为 $\frac{1}{2}$, 所以三棱锥 $P-A_1DD_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$, 故 B 错误; 对于 C, 线段 DP 在 $\triangle C_1BD$ 中, 当点 P 为 BC_1 的中点时, DP 最小, 此时 $DP\perp BC_1$, 在 $Rt\triangle BPD$ 中, $DP=\sqrt{BD^2-PB^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 DP 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 C 正确; 对于 D, 点 P 在平面 ADD_1A_1 上的投影在线段 AD_1 上, 设点 P 的投影为点 Q, 则 $\angle PDQ$ 为 DP 与平面 ADD_1A_1 所成的角, $\sin\angle PDQ=\frac{PQ}{PD}$, $PQ=1$, 而 $\frac{\sqrt{6}}{2}\leqslant PD\leqslant\sqrt{2}$, 所以 DP 与平面 ADD_1A_1 所成角的正弦值的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$, 而 $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以不存在点 P, 使得 DP 与平面 ADD_1A_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 故 D 错误. 故选 AC.



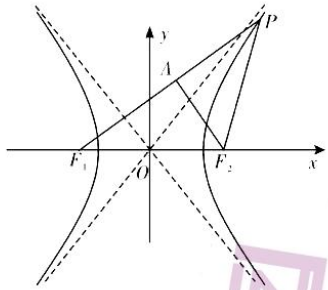
三、填空题

13. $3x-y-3=0$ 【解析】因为 $f'(x)=\ln x+\frac{2+x}{x}$, 所以 $f'(1)=3$, 因为 $f(1)=0$, 所以 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=3(x-1)$, 即 $3x-y-3=0$.

14. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】圆柱的轴截面如图, $AC=1$, $AB=\frac{1}{2}$, 所以圆柱底面半径 $r=BC=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则圆柱的体积是 $V=\pi r^2h=\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times1=\frac{3}{4}\pi$.



15. 48 【解析】∵双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 中 $a=3, b=4, c=5$, ∴$F_1(-5,0)$, $F_2(5,0)$,



$\because |PF_2|=|F_1F_2|$，$\therefore |PF_1|=2a+|PF_2|=6+10=16$.

作 PF_1 边上的高 AF_2，则 $AF_1=8$，$\therefore AF_2=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

$\therefore \triangle PF_1F_2$ 的面积为$\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|AF_2|=\frac{1}{2}\times16\times6=48$.

16. $\frac{5}{11}$，$\frac{9}{22}$ 【解析】因为每次取一球，所以 A_1，A_2，A_3 是两两互斥的事件.

因为 $P(A_1)=\frac{5}{10}$，$P(A_2)=\frac{2}{10}$，$P(A_3)=\frac{3}{10}$，所以 $P(B|A_1)=\frac{P(BA_1)}{P(A_1)}=\frac{\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}}{\frac{5}{10}}=\frac{5}{11}$；

同理 $P(B|A_2)=\frac{P(BA_2)}{P(A_2)}=\frac{\frac{2}{10}\times\frac{4}{11}}{\frac{2}{10}}=\frac{4}{11}$，$P(B|A_3)=\frac{P(BA_3)}{P(A_3)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}}{\frac{3}{10}}=\frac{4}{11}$.

所以 $P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}+\frac{2}{10}\times\frac{4}{11}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$.

四、解答题

17.【解析】(1)由正弦定理及 $a\sin B+\sqrt{3}b\cos A=0$ 得 $\sin A\sin B+\sqrt{3}\sin B\cos A=0$.

又在$\triangle ABC$ 中，$\sin B>0$，$\therefore \sin A+\sqrt{3}\cos A=0$.

得 $\tan A=-\sqrt{3}$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)及 $a=2\sqrt{7}$，$b=2$ 及余弦定理，得 $28=4+c^2-4c\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$，

即 $c^2+2c-24=0$，解得 $c=-6$(舍去)，$c=4$. ………………………………………………………… 7 分

由题设可得$\angle CAD=\frac{\pi}{2}$，所以$\angle BAD=\angle BAC-\angle CAD=\frac{\pi}{6}$.

故$\triangle ABD$ 与$\triangle ACD$ 面积的比值为$\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}AC\cdot AD}=1$.

又$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}\times4\times2\sin\angle BAC=2\sqrt{3}$，

所以$\triangle ABD$ 的面积为$\sqrt{3}$. ……………………………………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1)由题意知对业务水平满意的有260人,对服务水平满意的有200人,得2×2列联表

	对服务水平满意人数	对服务水平不满意人数	合计
对业务水平满意人数	180	80	260
对业务水平不满意人数	20	20	40
合计	200	100	300

…………………………………………………………………………………………………… 2分

经计算得 $K^2=\frac{300\times(180\times20-80\times20)^2}{200\times100\times260\times40}=\frac{75}{13}\approx5.77>5.024$. …………………………………… 5分

所以有97.5%的把握认为业务水平满意与服务水平满意有关. …………………………………… 6分

(2)X 的可能值为0,1,2.

则 $P(X=0)=\frac{C_{20}^{0}C_{80}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{316}{495}$,

$P(X=1)=\frac{C_{20}^{1}C_{80}^{1}}{C_{100}^{2}}=\frac{160}{495}$,

$P(X=2)=\frac{C_{20}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{19}{495}$. …………………………………………………………………… 9分

X	0	1	2
P	$\frac{316}{495}$	$\frac{160}{495}$	$\frac{19}{495}$

…………………………………………………………………………………………………… 10分

$E(X)=0\times\frac{316}{495}+1\times\frac{160}{495}+2\times\frac{19}{495}=\frac{2}{5}$. …………………………………………………… 12分

19.【解析】(1)证明:取 PA 的中点 Q,连接 QF,QD.

∵F 是 PB 的中点,∴$QF\,/\!/\,AB$,且 $QF=\frac{1}{2}AB$.

∵底面 $ABCD$ 为直角梯形,$\angle CDA=\angle BAD=90^\circ$,$AB=AD=2DC=2\sqrt{2}$,

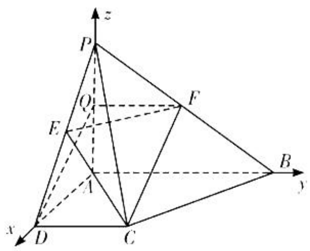
∴$CD\,/\!/\,AB$,$CD=\frac{1}{2}AB$,∴$QF\,/\!/\,CD$,且 $QF=CD$.

∴四边形 $QFCD$ 是平行四边形,∴$FC\,/\!/\,QD$.

又∵$FC\not\subset$ 平面 PAD,$QD\subset$ 平面 PAD,

∴$FC\,/\!/$ 平面 PAD. …………………………………………………………………………… 6分

(2)如图,分别以 AD,AB,AP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.



设 $PA=a\ (a>0)$,则 $A(0,0,0)$,$B(0,2\sqrt{2},0)$,$C(2\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$E\left(\sqrt{2},0,\frac{a}{2}\right)$,$F\left(0,\sqrt{2},\frac{a}{2}\right)$. ………………………………… 7分

取平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$.

$\overrightarrow{CE}=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{a}{2}\right)$,

$\overrightarrow{CF}=\left(-2\sqrt{2},0,\frac{a}{2}\right)$.

设平面 CEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$,

则有$\begin{cases}\overrightarrow{CE}\cdot n_2=0,\\ \overrightarrow{CF}\cdot n_2=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+\frac{a}{2}z=0,\\ -2\sqrt{2}x+\frac{a}{2}z=0,\end{cases}$

不妨取$z=4\sqrt{2}$，则$x=a$，$y=a$，即$n_2=(a,a,4\sqrt{2})$，…… 10分

$\therefore |\cos\langle n_1,n_2\rangle|=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+32}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

解得$a=4$，即PA的长为4. …… 12分

20.【解析】(1)若$a_1=3$，

当第一行第一列为a_1时，由题意知，可能的组合有，

$a_1=3,a_2=6,a_3=7$不是等差数列，$a_1=3,a_2=9,a_3=8$不是等差数列；…… 2分

当第一行第二列为a_1时，由题意知，可能的组合有，$a_1=3,a_2=4,a_3=7$不是等差数列，

$a_1=3,a_2=9,a_3=12$不是等差数列；…… 4分

当第一行第三列为a_1时，由题意知，可能的组合有，$a_1=3,a_2=4,a_3=8$不是等差数列，

$a_1=3,a_2=6,a_3=12$不是等差数列，

则$a_1=3$放在第一行的任何一列，满足条件的等差数列$\{a_n\}$都不存在，

故$a_1=1$，从而$a_2=4,a_3=7$.

综上可知：$a_n=3n-2,n\in\mathbf{N}^*$. …… 6分

(2)由(1)知，$b_n=(-1)^{n+1}(3n-2)^2$，

当n为偶数时，

$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2+\cdots+a_{n-1}^2-a_n^2$

$=(a_1+a_2)(a_1-a_2)+(a_3+a_4)(a_3-a_4)+\cdots+(a_{n-1}+a_n)(a_{n-1}-a_n)$

$=-3(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=-3\times\frac{n(1+3n-2)}{2}=-\frac{9}{2}n^2+\frac{3}{2}n$，

当n为奇数时，$T_n=T_{n-1}+b_n=-\frac{9}{2}(n-1)^2+\frac{3}{2}(n-1)+(3n-2)^2=\frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n-2$，

$\therefore T_n=\begin{cases}-\frac{9}{2}n^2+\frac{3}{2}n,n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\\ \frac{9}{2}n^2-\frac{3}{2}n-2,n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$ …… 12分

21.【解析】(1)依题意，$f'(x)=3xe^x-3ax=3x(e^x-a)$，

当$a=1$时，当$x\in\mathbf{R}$，$f'(x)\geq0$，函数$f(x)$单调递增. …… 2分

当$0<a<1$时，$\ln a<0$时，当$x\in(-\infty,\ln a)$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；当$x\in(\ln a,0)$，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；$x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增.

当$a>1$时，$\ln a>0$时，当$x\in(-\infty,0)$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增；

当$x\in(0,\ln a)$，$f'(x)<0$，函数$f(x)$单调递减；

$x\in(\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$，函数$f(x)$单调递增. …… 5分

(2)依题意，$3(x-1)e^x+x^3-3ax^2+\frac{3}{2}=0$，即$(x-1)e^x+\frac{1}{3}x^3-ax^2+\frac{1}{2}=0$，

令$g(x)=(x-1)e^x+\frac{1}{3}x^3-ax^2+\frac{1}{2}$，

则$g'(x)=xe^x+x^2-2ax=x(e^x+x-2a)$； …… 6分

当$a>\frac{1}{2}$时，令$h(x)=e^x+x-2a$，则$h(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，

因为 $h(0)=1-2a<0$， …… 7 分

$h(a)=e^{a}-a$，当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$h'(a)=e^{a}-1>0$，$h(a)$ 单调递增，所以 $h(a)>h\left(\frac{1}{2}\right)>0$，

所以 $h(a)=e^{a}-a>0$， …… 9 分

故存在唯一实数 $x_1\in(0,a)$，使得 $h(x_1)=0$，即 $g'(x_1)=0$，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,x_1)$ 上单调递减，在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $g(x_1)<g(0)=-1+\frac{1}{2}<0$， …… 10 分

$g(3a)=(3a-1)e^{3a}+\frac{1}{3}\cdot(3a)^3-a\cdot(3a)^2+\frac{1}{2}=(3a-1)e^{3a}+\frac{1}{2}>0$， …… 11 分

故当 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 恰有 1 个零点；

即关于 x 的方程 $f(x)+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}ax^2-x^3$ 有唯一实数解． …… 12 分

22.【解析】(1) 由题可知，抛物线 $C_1:y^2=2px(p>0)$ 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$，

则有 $\frac{\left(-\frac{p}{2}\right)^2}{4}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$ 得 $p=2$，所以 $C_1:y^2=4x$． …… 4 分

(2) 设点 P 坐标为 (x_0,y_0)，且满足 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1.(x_0\leqslant 0)$

由题意可知切线斜率不会为 0，即设切线 PC 为 $(x-x_0)=m_1(y-y_0)$，

代入 $C_1:y^2=4x$ 得 $y^2-4m_1y+4m_1y_0-4x_0=0$，

由 $\Delta=0$ 可得 $(-4m_1)^2-4(4m_1y_0-4x_0)=0\Rightarrow m_1^2-y_0m_1+x_0=0$． ① …… 5 分

设切点 $C(x_1,y_1)$，抛物线的上半部曲线函数关系式为 $y=2\sqrt{x}$，$y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$，

则 $y'|_{x=x_1}=\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{1}{m_1}$，故 $y_1=2\sqrt{x_1}=2m_1$，将其代入①可得 $y_1^2-2y_0y_1+4x_0=0$． ②

设切线 PD 为 $(x-x_0)=m_2(y-y_0)$，切点 $D(x_2,y_2)$，

同理可得 $y_2^2-2y_0y_2+4x_0=0$． ③

由②③可知 y_1,y_2 是方程 $y^2-2y_0y+4x_0=0$ 的两根， …… 7 分

所以 $y_1+y_2=2y_0$，$y_1\cdot y_2=4x_0$，又 $y_1^2=4x_1$，$y_2^2=4x_2$，

所以代入②③可知 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$ 是 $2x-y_0y+2x_0=0$ 的两点，

即 CD 直线方程为 $2x-y_0y+2x_0=0$． …… 9 分

则 $S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}d\cdot|CD|=\frac{1}{2}\cdot\frac{|2x_0-y_0^2+2x_0|}{\sqrt{4+y_0^2}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{y_0}{2}\right)^2}\sqrt{4y_0^2-16x_0}=\frac{(\sqrt{y_0^2-4x_0})^3}{2}$

又因为 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$ 且 $x_0\in[-2,0]$，所以 $S_{\triangle PCD}=\frac{(\sqrt{-x_0^2-16x_0+4})^3}{16}$．

令 $t=-x_0^2-16x_0+4$，$x_0\in[-2,0]$，由二次函数性质可知，其在 $x_0\in[-2,0]$ 上单调递减，

故 $t\in[4,32]$，所以 $S_{\triangle PCD}=\frac{(\sqrt{-x_0^2-16x_0+4})^3}{16}=\frac{(\sqrt{t})^3}{16}\in\left[\frac{1}{2},8\sqrt{2}\right]$． …… 12 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。