德阳市高中2020级“三诊”试题

数学参考答案与评分标准

（理工农医类）

一、选择题（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	C	A	D	B	B	D	B	C	A	C

二、填空题（每小题5分，共20分）

13. 2　　14. 8　　15. $3\sqrt{3}$　　16. 2.

三、解答题

17. 解：(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d

$\because a_2+a_4+a_6=21 \quad \therefore a_4=7$

由 $a_4=a_2+2d$ 得：$7=3+2d$

$\therefore d=2 \quad \therefore a_1=1$

$\therefore a_n=2n-1.$ ………………………………………… 4分

又 $S_n+b_n=2 \quad \therefore S_{n+1}+b_{n+1}=2$

$\therefore 2b_{n+1}-b_n=0$，即 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n$

$\because b_1+b_1=2 \quad \therefore b_1=1$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 为首项是1，公比是 $\frac{1}{2}$ 的等比数列

$\therefore b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$ ………………………………………… 8分

(2) 由题意知 $c_n=2n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

于是 $T_n=\dfrac{n(1+2n-1)}{2}+\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=n^2+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ …………… 12分

18. 解：(1) 由题意可知，绝对学困生有$(0.25+0.50+0.75)\times0.2\times100=30$ 人

“亟待帮助生”共有 $0.25\times0.2\times100=5$ 人

学困指标的平均值为：$(0.25\times0.1+0.5\times0.3+0.75\times0.5+2\times0.7+1.5$

$\times0.9)\times0.2=0.66$. …………………………………………………… 5分

(2) 学困指标在$[0,0.4)$内的学困生共有$(0.25+0.50)\times0.2\times100=15$ 人

依题意得 X 的所有可能取值为 0,1,2 …………………………………… 7分

$P(X=0)=\dfrac{C_{10}^{2}}{C_{15}^{2}}=\dfrac{3}{7}$

$P(X=1)=\dfrac{C_{10}^{1}C_{5}^{1}}{C_{15}^{2}}=\dfrac{10}{21}$

$P(X=2)=\dfrac{C_{5}^{2}}{C_{15}^{2}}=\dfrac{2}{21}$

则 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$

故 $E(X)=0\times\dfrac{3}{7}+1\times\dfrac{10}{21}+2\times\dfrac{2}{21}=\dfrac{2}{3}$. …………………………… 12分

19. $\triangle PDA$ 沿 PD 翻折中不会改变二面角 $C-BA'-P$ 的大小，其大小为90°.

(1) 证明：$\because PD\parallel BC$，$\angle B=90^\circ$　　$\therefore A'P\perp PD$

$\therefore A'P\perp BC$

$\because CB\perp PB$，$A'P\cap PB=P$

$\therefore CB\perp$ 平面 $A'PB$

$\because CB\subset$ 平面 $A'CB$

$\therefore$ 平面 $A'CB\perp$ 平面 $A'PB$. 故二面角 $C-BA'-P$ 的大小为定值90°.

………………………………………………………………………… 4分

(2) 解：设 $A'B$ 的中点为 F，连接 EF，PF.

$\because E$ 为 $A'C$ 的中点　　$\therefore EF\parallel BC$ 且 $CB=2EF$.

$\because PD\parallel BC$ 且 $CB=2PD$　　$\therefore EF\parallel PD$ 且 $PD=EF$

∴ 四边形 $PDEF$ 为平行四边形.

∴$ED \parallel PF$

而 $PF \subset$ 平面 $A'PB$，$ED \not\subset$ 平面 $A'PB$

∴$DE \parallel$ 平面 $A'PB$. ………………………………………………………… 7分

∵ 平面 $PDA' \perp$ 平面 $PBCD$，平面 $PDA' \cap$ 平面 $PBCD = PD$，$A'P \perp PD$

∴$PA' \perp$ 平面 $PBCD$ ………………………………………………………… 8分

以 PA，PD，PA' 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $P-xyz$，则

$D(0,1,0)$，$C(-2,2,0)$，$B(-2,0,0)$，$A'(0,0,2)$，$E(-1,1,1)$

∴ 平面 BCD 的一个法向量为 $m=(0,0,2)$

∵$\overrightarrow{DE}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{DB}=(-2,-1,0)$

∴ 设平面 BDE 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，则由 $n \perp \overrightarrow{DE}$，$n \perp \overrightarrow{DB}$

可求得 $n=(1,-2,1)$.

∴$\cos\langle m,n\rangle=\dfrac{m \cdot n}{|m| \cdot |n|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

故二面角 $E-BD-C$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$. ………………………………………… 12分

20. 解：(1) 由 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 得：$a=2b$，$c=\sqrt{3}b$

所以 $F_1(-\sqrt{3}b,0)$，$F_2(\sqrt{3}b,0)$，$P(2b,0)$

则$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{3}b-2b,0) \cdot (\sqrt{3}b-2b,0)=b^2$

由题意 $b^2=1$.

故所求椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………… 4分

(2) 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $M(x_1,-y_1)$

由$\begin{cases} x=ky-1 \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得：$(k^2+4)y^2-2ky-3=0$，$\Delta=16k^2+48>0$

故 $y_1+y_2=\dfrac{2k}{k^2+4}$，$y_1 \cdot y_2=\dfrac{-3}{k^2+4}$.

经过点 $M(x_1,-y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的直线方程为 $\dfrac{y+y_1}{y_2+y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$. …8分

令 $y=0$，则 $x=\dfrac{x_2-x_1}{y_1+y_2}y_1+x_1=\dfrac{(x_2-x_1)y_1+(y_1+y_2)x_1}{y_1+y_2}=\dfrac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}$

又 $x_1=ky_1-1$，$x_2=ky_2-1$

所以 $x=\dfrac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}=\dfrac{(ky_2-1)y_1+(ky_1-1)y_2}{y_1+y_2}$ ………………… 10分

$$=\frac{2ky_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=\frac{\dfrac{-6k}{k^2+4}-\dfrac{2k}{k^2+4}}{\dfrac{2k}{k^2+4}}=-4.$$

故直线 MB 与 x 轴交于定点 $(-4,0)$. ………………………………… 12分

21.解：(1) 由题意曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线斜率均不小于 2,

$\therefore f'(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}+1\geqslant 2$ 即 $a\geqslant x-x\ln x$ 在 $x>0$ 时恒成立

设 $F(x)=x-x\ln x$，则 $F'(x)=-\ln x$

由 $F'(x)>0$ 得：$0<x<1$

$\therefore x\in(0,1)$ 时 $F(x)$ 单增，$x\in(1,+\infty)$ 时 $F(x)$ 单减

$\therefore F(x)$ 的最大值为 $F(1)=1$　　$\therefore a\geqslant 1$

$\because a\leqslant 1$　　$\therefore a=1$. ………………………………………………… 2分

$\therefore h(x)=f(x)-g(x)=(x+1)\ln x-\dfrac{x^2}{e^x}$

当 $x\in(0,1]$ 时，$h(x)<0$

又 $h(2)=3\ln 2-\dfrac{4}{e^2}=\ln 8-\dfrac{4}{e^2}>1-1=0$

$\therefore$ 存在 $x_0\in(1,2)$，使 $h(x_0)=0$. ………………………………… 3分

因为 $h'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1+\dfrac{x(x-2)}{e^x}$

当 $x\in(1,2)$ 时，$0<x(2-x)=-(x-1)^2+1<1$

$e^x>e$　　$\therefore 0<\dfrac{1}{e^x}<\dfrac{1}{e}$　　$\therefore \dfrac{x(2-x)}{e^x}<\dfrac{1}{e}$

$\therefore h'(x)>1-\frac{1}{e}>0$

$\therefore$ 当 $x\in(1,2)$ 时，$h(x)$ 单调递增

$\therefore$ 函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一的零点. ……………… 5分

(2) 由(1)知，方程 $f(x)=g(x)$ 在 $(1,2)$ 内存在唯一的实根 x_0，且 $x\in(0,x_0$

时，$f(x)<g(x)$

又当 $x\in(x_0,2)$ 时，$h'(x)>0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$

$\therefore$ 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$

$\therefore$ 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f(x)>g(x)$

$$\therefore m(x)=\begin{cases}(x+1)\ln x, & x\in(0,x_0]\\ \frac{x^2}{e^x}, & x\in(x_0,+\infty)\end{cases}$$ …………………………………………… 7分

① 当 $x\in(0,x_0)$ 时，若 $x\in(0,1]$，则 $m(x)\leqslant 0$；

若 $x\in(1,x_0]$，由 $m'(x)=\ln x+\frac{1}{x}+1>0$

可知 $0<m(x)\leqslant m(x_0)$

故当 $x\in(0,x_0]$ 时，$m(x)\leqslant m(x_0)$. ………………………………………… 9分

② 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，由 $m'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$ 可得当 $x\in(x_0,2)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增；$x\in(2,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减.

可知 $m(x)\leqslant m(2)=\frac{4}{e^2}$，且 $m(x_0)<m(2)$.

综上可得，函数 $m(x)$ 的最大值为 $\frac{4}{e^2}$. ………………………………………… 11分

由 $m(x)\leqslant k$ 恒成立得 $k\geqslant\frac{4}{e^2}$

故 k 的最小整数值为1. ………………………………………………………… 12分

2.解：(1) 由 $\rho=2\sqrt{5}\sin\theta$，得：$x^2+y^2-2\sqrt{5}y=0$

即 $x^2+(y-\sqrt{5})^2=5$. …………………………………………………………… 3分

(2) 将 l 的参数方程 $\begin{cases} x=3-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（$t$ 为参数）代入圆 C 的直角坐标方程

得：$\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=5$，即 $t^2-3\sqrt{2}t+4=0$.

由于 $\Delta=(3\sqrt{2})^2-4\times4=2>0$，故可设 t_1,t_2 是上述方程的两实根

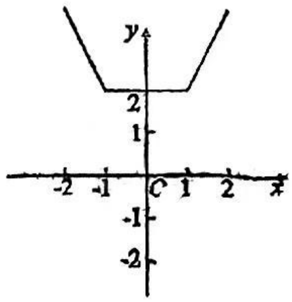
所以 $\begin{cases} t_1+t_2=3\sqrt{2} \\ t_1\cdot t_2=4. \end{cases}$

又直线 l 过点 $P(3,\sqrt{5})$

故由上式及 t 的几何意义得：$|PA|\cdot|PB|=|t_1|\cdot|t_2|=|t_1t_2|=4$. ……

…………………………………………………………………… 10分

23. 解：(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=|x-1|+|x+1|$



$f(x)=\begin{cases} -2x, x<-1 \\ 2, -1\leqslant x\leqslant 1 \\ 2x, x>1. \end{cases}$

作出函数 $f(x)=|x-1|+|x+1|$ 的图象.

由图象可知，不等式的解集为

$\left\{x \middle| x\leqslant-\frac{3}{2} \text{或} x\geqslant\frac{3}{2}\right\}$. …………………………………… 5分

(2) 若 $a=1$，$f(x)=2|x-1|$，不满足题设条件；

若 $a<1$，$f(x)=\begin{cases} -2x+a+1, x\leqslant a \\ 1-a, a<x<1 \\ 2x-(a+1), x\geqslant 1 \end{cases}$

$f(x)$ 的最小值为 $1-a$.

∴ 对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 2$ 的充要条件是 $1-a\geqslant 2$ ∴ $a\leqslant-1$

∴ a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$. …………………………………… 10分