题 1. 对非负实数 x 令 $\pi(x)$ 为不超过 x 的素数个数，如 $\pi(1)=0$，$\pi(2)=1$，再令 $f(x)$ 为第 $\left[\frac{x}{4}\right]+1$ 个素数，求 $\int_0^{100}\left(\pi(x)+\frac{1}{4}f(x)\right)\mathrm{d}x$ 的值.

解析 1. 易知 100 以内的质数有 25 个，将这些质数由小到大排列，得到 $a_1,a_2,\cdots,a_{25}$. 于是

$$\begin{aligned}\int_1^{100}\pi(x)\mathrm{d}x &= \int_1^{a_1}0\mathrm{d}x+\int_{a_1}^{a_2}1\mathrm{d}x+\cdots+\int_{a_n}^{a_{n+1}}n\mathrm{d}x+\cdots+\int_{a_{25}}^{100}25\mathrm{d}x\\ &=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdots+24(a_{25}-a_{24})+25(100-a_{25})\\ &=(100-a_1)+(100-a_2)+\cdots+(100-a_{25})\\ &=2500-\sum_{n=1}^{25}a_n\end{aligned}$$

注意到

$$a_k=f(x)(k=1,2,\cdots,25)\Leftrightarrow k=[\frac{x}{4}]+1\Leftrightarrow 4(k-1)\leqslant x<4k$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{100}\frac{1}{4}f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\left(\int_{4(1-1)}^{4}a_1\mathrm{d}x+\int_{4(2-1)}^{8}a_2\mathrm{d}x+\cdots+\int_{96}^{100}a_{25}\mathrm{d}x\right)\\ &=\sum_{n=1}^{25}a_n\end{aligned}$$

综上，原式 $=2500-\sum\limits_{n=1}^{25}a_n+\sum\limits_{n=1}^{25}a_n=2500$.

题 2. 若定义在 $\mathbb{R}$ 上的光滑函数 $h(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开为 $c_k x^k + c_{k+1}x^{k+1} + \cdots$，其中 $c_k \neq 0$，则定义 $ord(h)=k$，若 $h(x)$ 在 $x=0$ 处泰勒展开系数均为 0，则定义 $ord(h)=\infty$，令 $S=\{f(x)\,|\,f(x)\text{为定义在}\mathbb{R}\text{上的光滑奇函数，满足}f'(0)=1\}$，设

$$m=\min\{ord(f(g(x))-g(f(x)))\,|\,f(x)\in S, g(x)\in S\}$$

1. 求 m;

2. 对于 $f(x), g(x)\in S$，设 $f^{(i)}(0)=a_i$，$g^{(i)}(0)=b_i$，$i=2,3,\ldots$，求 $f(g(x))-g(f(x))$ 在 $x=0$ 处泰勒展开式中 x^m 的系数关于 a_i, b_i 的表达式.

解析 2. (1) 对 $f\in S$，因为 f 为奇函数，所以 f 在 $x=0$ 处的泰勒展开式不含 $x^{2k}(k=0,1,\cdots)$ 项. 故不妨设 f,g 的泰勒展开式分别为

$$x+f_1x^3+f_2x^5+\cdots \quad \text{和} \quad x+g_1x^3+g_2x^5+\cdots$$

由条件易知，$ord(f)$ 即为 $x\to 0$ 时，无穷小量 f 的阶.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= g(x)+f_1g^3(x)+f_2g^5(x)+f_3g^7(x)+o(g^8(x)) \\ &= x+(g_1+f_1)x^3+(g_2+3f_1g_1+f_2)x^5+(g_3+3f_1g_2 \\ &\quad +3f_1g_1^2+5f_2g_1+f_3)x^7+o(x^8) \quad (x\to 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= f(x)+g_1f^3(x)+g_2f^5(x)+g_3f^7(x)+o(f^8(x)) \\ &= x+(f_1+g_1)x^3+(f_2+3g_1f_1+g_2)x^5+(f_3+3g_1f_2 \\ &\quad +3g_1f_1^2+5g_2f_1+g_3)x^7+o(x^8) \quad (x\to 0) \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f(g(x))-g(f(x)) = &[(g_3+3f_1g_2+3f_1g_1^2+5f_2g_1+f_3) \\ &-(f_3+3g_1f_2+3g_1f_1^2+5g_2f_1+g_3)]x^7+o(x^8) \quad (x\to 0) \end{aligned}$$

所以 $m\geqslant 7$. 令 $f(x)=x+x^3$，$g(x)=x+x^5$，有

$$f(g(x))-g(f(x))=-2x^7-10x^9-7x^{11}-5x^{13}$$

故 $m=7$.

(2) 由 (1) 中计算结果可知 x^7 系数为

$$\begin{aligned}
&(g_3+3f_1g_2+3f_1g_1^2+5f_2g_1+f_3)-(f_3+3g_1f_2+3g_1f_1^2+5g_2f_1+g_3)\\
&=3f_1g_2+3f_1g_1^2+5f_2g_1-(3g_1f_2+3g_1f_1^2+5g_2f_1)\\
&=2(f_2g_1-g_2f_1)+3(f_1g_1^2-g_1f_1^2)\\
&=2\left(\frac{a_5}{5!}\frac{b_3}{3!}-\frac{a_3}{3!}\frac{b_5}{5!}\right)+3\left(\frac{a_3}{3!}\frac{b_3^2}{(3!)^2}-\frac{b_3}{3!}\frac{a_3^2}{(3!)^2}\right)\\
&=\frac{a_5b_3-a_3b_5}{360}+\frac{a_3b_3^2-b_3a_3^2}{72}\\
&=\frac{(b_3a_5-a_3b_5)+5(a_3b_3^2-b_3a_3^2)}{720}
\end{aligned}$$

题 3. 给定正整数 n，设 A,B 为 n 阶复方阵，满足 $AB+A=BA+B$，求证 $(A-B)^n=0$.

解析 3. 令 $C=A-B$，则条件中的等式化简可得

$$(B+C)B+B+C=B(B+C)+B\Rightarrow BC-CB=C$$

注意到，对任意 $k\in\mathbb{N}^*$

$$trace(C^k)=trace((BC-CB)C^{k-1})=trace(BC^k-CBC^{k-1})=0$$

设复矩阵 C 的若当标准型的对角元为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$0=trace(C^k)=\lambda_1^k+\lambda_2^k+\cdots+\lambda_n^k\quad(k\in\mathbb{N}^*)$$

若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不全为零，不妨设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中互不相同且非零的取值为 $a_1,a_2,\cdots,$ 重数对应为 $b_1,b_2,\cdots,b_m$. 于是我们有

$$\begin{cases}b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_ma_m=0\\ b_1a_1^2+b_2a_2^2+\cdots+b_ma_m^2=0\\ \cdots\\ b_1a_1^m+b_2a_2^m+\cdots+b_ma_m^m=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_m\\ a_1^2&a_2^2&\cdots&a_m^2\\ \vdots&&&\vdots\\ a_1^m&a_2^m&\cdots&a_m^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

由范德蒙行列式性质知，上式中的矩阵非退化，从而必须有 $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$，而这与 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的定义矛盾，故假设前提不成立，于是 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$，从而 $C^n=\mathbf{O}$.

题 4. 对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{Z}^3$,定义 $|\boldsymbol{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$. 求所有的实数 α,使 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,0<|\boldsymbol{x}|<\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha$ 存在且有限.

解析 4. 显然 $\alpha<0$. 注意到 $|\boldsymbol{x}|^\alpha>0$, 所以 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sum\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,0<|\boldsymbol{x}|<\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha$ 存在且有限等价于 $\sum\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,0<|\boldsymbol{x}|<\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha$ 有界.

对任意 $\lambda>0$, 记

$$A_\lambda=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\mid 0<|\boldsymbol{x}|<\lambda\}$$

$$B_\lambda=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\mid 0\leqslant x_i<\lambda,i=1,2,3\}$$

$$C_\lambda=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\mid 0\leqslant x_i<\lambda/\sqrt{3},i=1,2,3\}$$

一方面, 因为 $A_\lambda\subset B_\lambda$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,0<|\boldsymbol{x}|<\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha&\leqslant\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,\boldsymbol{x}\in B_\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha\leqslant\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,\boldsymbol{x}\in B_\lambda}|\max\{x_1,x_2,x_3\}|^\alpha\\&\leqslant\sum_{k=1}^{[\lambda]+1}k^\alpha(k+1)^2<4\sum_{k=1}^{[\lambda]+1}k^{\alpha+2}\end{aligned}$$

于是 $\alpha+2<-1$ 即 $\alpha<-3$ 时, $\sum\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,0<|\boldsymbol{x}|<\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha$ 有界.

另一方面, $C_\lambda\subset A_\lambda$, 所以

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,0<|\boldsymbol{x}|<\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha&\geqslant\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,\boldsymbol{x}\in C_\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha\geqslant\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,\boldsymbol{x}\in C_\lambda}|3\max\{x_1,x_2,x_3\}|^\alpha\\&\geqslant 3^{-\alpha}\sum_{k=1}^{[\lambda]+1}k^{\alpha+2}\end{aligned}$$

于是 $\alpha+2\geqslant-1$ 即 $\alpha\geqslant-3$ 时, $\sum\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^3,0<|\boldsymbol{x}|<\lambda}|\boldsymbol{x}|^\alpha$ 无界

综上, $\alpha<-3$.

题 5. 给定正整数 $m\geqslant2$, $n\geqslant2$ 以及实数 a,b, 设有 $m+n$ 阶实方阵

$$A=\begin{bmatrix}J&\\&K\end{bmatrix}$$

其中 J 为 m 阶方阵，K 为 n 阶方阵：

$$J=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a \end{bmatrix}_{m\times m}, K=\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

求线性空间 $\{X\in M_{m+n}(\mathbb{R})\,|AX=XA\}$ 的维数.

解析 5. 令

$$J=aI_m+D_m,\quad K=bI_n+D_n\quad(\;\text{为}m,n\text{级单位矩阵})$$

验证易知与 J 可交换的方阵可表示为 D_m 的多项式，与 K 可交换的矩阵可表示为 D_n 的多项式.

设 X 可划分为分块矩阵

$$X=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$$

其中 X_1,X_4 为 m,n 级方阵，X_2,X_3 为 $m\times n$ 和 $n\times m$ 矩阵. 于是

$$AX=XA\Leftrightarrow\begin{bmatrix} JX_1 & JX_2 \\ KX_3 & KX_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1J & X_2K \\ X_3J & X_4K \end{bmatrix}$$

因此

$$X_1J=JX_1,X_4K=KX_4,JX_2=X_2K,KX_3=X_3J$$

由前文分析可知，X_1,X_4 分别为 D_m,D_n 的多项式. 下面我们讨论 X_2 和 X_3，由对称性可知只需讨论 X_2 的情形即可. 注意到设 $X_2=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)'$

$$JX_2=aX_2+(0,\beta_1,\cdots,\beta_{m-1})'$$

$$X_2K=bX_2+(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n,0)$$

若 $a=b$，则 $m<n$ 时有 $X_2=[Y_2\quad O]$，其中 Y_2 为 m 级方阵且为 D_m 的多项式；$m=n$ 时 X_2 为 D_m 多项式；$m>n$ 时有 $X_2=[Y_2\quad O]'$，其中 Y_2 为 n 级方阵且为 D_n 的多项式. 同理可得 X_3 对应结论，故此种情形下

$$\dim\{X\in M_{m+n}(\mathbb{R})\,|AX=XA\}=m+n+2\min\{m,n\}$$

若 $a \neq b$，验证易知必有 X_2, X_3 元素均为 0，故此种情形下

$$\dim\{X \in M_{m+n}(\mathbb{R}) \,|\, AX = XA\} = m + n$$

题 6. 给定整数 $n \geqslant 2$ 及实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，令 n 阶实矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_n \end{bmatrix}.$$

对线性空间 $V = \{x \in M_n(\mathbb{R}) \,|\, X^T = X\}$，定义线性变换 $V \to V, F(X) = AXA^T$，求 $\mathrm{tr}(F)$ 和 $\det(F)$.

解析 6. 记 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，并取 A 在特征值 λ_i 下的特征向量 α_i.

其中若 $\lambda_i = \cdots = \lambda_j$ 为相同的特征值，则 $\alpha_i, \cdots, \alpha_j$ 为此特征值下线性无关的特征向量.

$$A\alpha_i = \lambda_i\alpha_i \Rightarrow \alpha_i^T A^T = \lambda_i \alpha_i^T \Rightarrow A\alpha_i\alpha_j^T A^T = \lambda_i\alpha_i\lambda_j\alpha_j^T$$

记 $X_{ij} = \alpha_i\alpha_j^T + \alpha_j\alpha_i^T \in V$，则 $A^T X_{ij} = \lambda_i\lambda_j X_{ij}$ 故 $\lambda_i\lambda_j$ 为 F 特征值.

而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为线性无关的特征向量，即为 n 维向量空间的基. 取 n 维向量空间的自然基 e_i，显然 $e_ie_j^T + e_je_i^T (1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 为 V 的基. 而设 $e_i = \sum\limits_{s=1}^{n} k_{is}\alpha_s$，则对任意 $X \in V$，$X = \sum\limits_{i<j} t_{ij}(e_ie_j^T + e_je_i^T) = \sum\limits_{i<j} t_{ij}(\sum\limits_{s,t} k_{is}\alpha_s k_{jt}\alpha_t^T + k_{jt}\alpha_t k_{is}\alpha_s^T) = \sum\limits_{s,t}\sum\limits_{i<j} t_{ij}k_{is}k_{jt}(\alpha_s\alpha_t^T + \alpha_t\alpha_s^T)$ 可由 X_{st} 线性表示. 故有 $X_{ij}(1 \leq i < j \leq n)$ 构成 V 的基，线性无关. 从而 $\lambda_i\lambda_j(1 \leq i < j \leq n)$ 恰为 F 全部 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个特征值.

又 $|\lambda I - A| = \lambda^n - a_n\lambda^{n-1} - \cdots - a_1$，故 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = a_n$，$\sum\limits_{i<j} \lambda_i\lambda_j = -a_{n-1}$.

故 $tr(F) = \sum\limits_{i \leq j} \lambda_i\lambda_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \sum\limits_{i<j} \lambda_i\lambda_j = (\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i)^2 - \sum\limits_{i<j} \lambda_i\lambda_j = a_n^2 + a_{n-1}$.

$\det(F) = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{n+1} = |A|^{n+1} = ((-1)^{n+1}a_1)^{n+1} = (-a_1)^{n+1}$.

题 7. 给定整数 $n \geqslant 2$. 记 S_n 为 n 阶置换群. 考虑线性空间

$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,| x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$$

，对于 $\tau \in S_n$，定义线性变换 $\rho\tau : V \to V, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \to (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \ldots, x_{\tau(n)})$. 记 $\chi(\tau) = \mathrm{tr}(\rho\tau)$.

1. 对 $\tau \in S_n$，求 $\chi(\tau)$ 所有可能取值.

2. 求 $\sum\limits_{\tau \in S_n} (\chi(\tau))^2$ 的值.

解析 7. (1) 对 $\mathbb{R}^n$ 定义线性变换

$$f\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto (x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \cdots, x_{\tau(n)})$$

显然 V 是 $f\tau$ 的不变子空间，$\rho\tau$ 实质是 $f\tau|_V$.

在 $\mathbb{R}^n$ 的自然基下，$f\tau$ 对应的矩阵即为 $P_{f\tau} = (\alpha_{\tau^{-1}(1)}, \alpha_{\tau^{-1}(2)}, \cdots, \alpha_{\tau^{-1}(n)})$，其中 $\alpha_{\tau^{-1}(i)}$ 为第 $\tau^{-1}(i)$ 个分量为 1 剩余分量为 0 的 n 为列向量.

令

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & -1 & \end{pmatrix} := (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1}, \beta_n)$$

显然该矩阵前 $n-1$ 列对应的列向量是 V 的一组基，于是 $T^{-1}P_{f\tau}T$ 前 $n-1$ 行列构成的子矩阵，即是 $\rho\tau$ 在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-1}$ 对应的矩阵. 记 $T^{-1}P_{f\tau}T$ 第 n 行 n 列的元素为 p_{nn} 于是

$$trace(P_{f\tau}) = trace(T^{-1}P_{f\tau}T) = trace(\rho\tau) + p_{nn} \Rightarrow \chi(\rho\tau) = trace(P_{f\tau}) - p_{nn}$$

注意到

$$p_{nn} = (1, 1, \cdots, 1)P_{f\tau}(1, 0, 0, \cdots, 0)' = 1$$

所以 $trace(\rho\tau) = trace(P_{f\tau}) - 1$. 易知 $trace(P_{f\tau})$ 的所有可能取值为 $0, 1, 2, \cdots, n-2, n$，所以 $trace(\rho\tau)$ 的可能值为 $-1, 0, \cdots, n-3, n-1$.

(2) 由 (1) 知，$\chi(\tau)=trace(P_{f\tau})-1$，而 $trace(P_{f\tau})$ 即为置换 τ 不动点的个数. 我们下面用期望的方式来计算 $\sum\limits_{\tau\in S_n}(\chi(\tau))^2$.

假设每个置换都是等可能的 (概率为 $\frac{1}{n!}$). 定义随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，其中

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{该置换下}i\text{不是不动点}\\ 1, & \text{该置换下}i\text{是不动点}\end{cases},\quad i=1,2,\cdots,n$$

于是我们易知 $P(X_i=1)=\frac{1}{n}$，从而 $E(X_i)=E(X_i^2)=\frac{1}{n}$. 又因为不动点的个数即为 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，所以

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=1$$

我们下面只需计算 $E[(X-1)^2]=E(X^2)-2E(X)+1=E(X^2)-1$.

$$\begin{aligned}E(X^2)&=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)+\sum_{i\neq j}E(X_iX_j)\\&=1+\sum_{i\neq j}E(X_iX_j)\end{aligned}$$

注意当 $i\neq j$ 时，

$$E(X_iX_j)=P(X_i=1,X_j=1)=\frac{1}{n(n-1)}$$

所以

$$E(X^2)=1+\sum_{i\neq j}E(X_iX_j)=1+\frac{n(n-1)}{n(n-1)}=2$$

于是 $E[(X-1)^2]=E(X^2)-1=1$，所以 $\sum\limits_{\tau\in S_n}(\chi(\tau))^2=n!$.

题 8. 设 $p\in[1,+\infty)$，对 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，定义 $\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 问：是否存在常数 C，使得对于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ 满足 $\|\boldsymbol{x}\|_p=\|\boldsymbol{y}\|_p$，以及 $\forall\theta\in[0,1]$，满足 $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_p\leqslant C\|\theta\boldsymbol{x}-(1-\theta)\boldsymbol{y}\|_p$? 若存在，求出 C 的最小值，若不存在，说明理由.

解析 8. 暂缺，待后续补充