

2023 年高考桂林、崇左市联合调研考试
理科数学参考答案

1~12: CBAAA BCDA BA

13. 1 14. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 15. 2.8 16. $(\sqrt{2}+1)\pi$

17. 解: (1) 由题中表格可得 2×2 列联表如下:

	阅读爱好者	非阅读爱好者	合计
男生	45	10	55
女生	30	15	45
合计	75	25	100

.....2 分

由题意得 $K^2 = \frac{100 \times (15 \times 15 - 30 \times 10)^2}{25 \times 75 \times 55 \times 45} \approx 3.03 < 3.841$

.....5 分

所以在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下, 不能认为“阅读爱好者”与性别有关.

.....6 分

(2) 根据检测得分不低于 80 分的人称为“阅读达人”, 则这 100 名学生中的男生“阅读达人”中, 按分层抽样的方式抽取, $[80, 90)$ 内应抽取 3 人, $[90, 100]$ 内应抽取 2 人,

所以, X 的取值为 0, 1, 2

$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}, P(X=1) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}$ 10 分

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

.....11 分

$E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$

所以 X 的数学期望是 $\frac{6}{5}$ 12 分

18. 解: (1) $\because S_n = a_{n+1} - 2^n$

$\therefore S_n = S_{n+1} - S_n - 2^n$ 1 分

$\therefore S_{n+1} = 2S_n + 2^n$

$\therefore \frac{S_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{S_n}{2^n} = \frac{1}{2}$ 3 分

又 $\because a_1 = 1, \therefore \frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}$ 4 分

所以数列 $\left\{ \frac{S_n}{2^n} \right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项和公差的等差数列.5 分

(2) 由 (1) 知: $\frac{S_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n}{2}$

所以 $S_n = n \cdot 2^{n-1}$ 6 分

$\therefore a_{n-1} = S_n + 2^n = (n+2)2^{n-1}$

$\therefore a_n = (n+1)2^{n-2} (n \geq 2)$

又 $a_1 = 1$ 满足上式

$\therefore a_n = (n+1)2^{n-2} (n \in N^*)$ 8 分

因为 $\forall n \in N^*, (n-6)a_n \geq \lambda 2^n$

所以 $(n-6)(n+1)2^{n-2} \geq \lambda 2^n$

所以 $\forall n \in N^*, \frac{(n-6)(n+1)}{4} \geq \lambda$ 9 分

记 $f(n) = \frac{(n-6)(n+1)}{4} (n \in N^*)$

则只需 $f(n)_{\min} \geq \lambda$ 10 分

又 $f(n)$ 在 $(1, \frac{5}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{5}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $n \in N^*$

所以 $f(n)_{\min} = f(2) = f(3) = -3$

所以 $\lambda \leq -3$

所以 λ 的最大值为 -3 12 分

19. (1) 证明: 连接 AO

$\because O$ 为 BC 中点, $\triangle ABC$ 为等边三角形

$\therefore AO \perp BC$

\because 点 P 在底面 ABC 上的射影为点 O

$\therefore PO \perp$ 面 ABC

$\therefore PO \perp BC$ 2 分

由 $BC \perp AO, BC \perp PO, AO \cap PO = O,$

$AO \subset$ 面 $APO, PO \subset$ 面 APO

得 $BC \perp$ 面 APO 4 分

$\therefore AM \subset$ 面 APO

$\therefore BC \perp AM$ 5 分

(2) 由已知及 (1) 可知, OB, OA, OP 两两互相垂直

\therefore 以 OB, AO, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,6 分

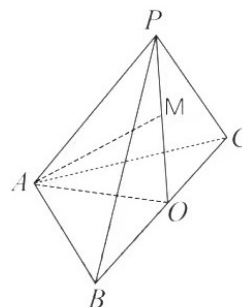
则 $A(0, -3, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0)$

$\because BO$ 为 PB 在底面 ABC 上的射影

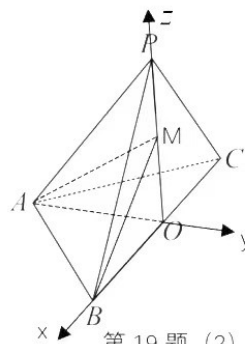
$\therefore \angle PBO$ 为 PB 与面 ABC 所成角,

$\therefore \angle PBO = \frac{\pi}{3}, \therefore PO = 3,$ 7 分

$\therefore P(0, 0, 3)$, 假设符合题意的点 M 存在, 且设 $M(0, 0, c) (0 < c < 3)$



第 19 题 (1)



第 19 题 (2)

设 $\vec{m} = (x, y, z)$ 为面 PAB 的法向量, 则 $\vec{PA} \cdot \vec{m} = 0, \vec{PB} \cdot \vec{m} = 0$
 $\therefore \vec{PA} = (0, -3, -3), \vec{PB} = (\sqrt{3}, 0, -3)$
 $\therefore \begin{cases} -3y - 3z = 0 \\ \sqrt{3}x - 3z = 0 \end{cases}$, 令 $y = 1$, 则 $\vec{m} = (-\sqrt{3}, 1, -1)$ 8 分

设 $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ 为面 MAB 的法向量, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{n} = 0, \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$
 $\therefore \vec{AB} = (\sqrt{3}, 3, 0), \vec{AM} = (0, 3, c)$
 $\therefore \begin{cases} \sqrt{3}x_1 + 3y_1 = 0 \\ 3y_1 + cz_1 = 0 \end{cases}$, 令 $y_1 = 1$, 则 $\vec{n} = \left(-\sqrt{3}, 1, -\frac{3}{c}\right)$ 9 分

\therefore 二面角 $P-AB-M$ 的余弦值为 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$
 $\therefore |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ 10 分

$\therefore \frac{\left|3 + 1 + \frac{3}{c}\right|}{\sqrt{5} \sqrt{4 + \frac{9}{c^2}}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$, 化简得 $4c^2 - 48c + 63 = 0$

解得 $c = \frac{3}{2}$ 或 $c = \frac{21}{2}$ (舍) 11 分

$\therefore M\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$ 符合题意, 此时点 M 为 PO 的中点. 12 分

20. 【解】(1) 将 $A(-2, 0), B(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 代入椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中,

$\frac{2^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$ 1 分

$\frac{3}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$ 2 分

得 $a = 2, b = \sqrt{3}$, 3 分

故椭圆 C 方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 设直线 $l: y = kx + m, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 5 分

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$ 得,

$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-8km}{4k^2 + 3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3} \end{cases}$, 6 分

$\Delta = 64k^2m^2 - 4(4k^2 + 3)(4m^2 - 12) = 192k^2 - 48m^2 + 144$,

又 $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2} = \frac{kx_1 + m}{x_1 + 2}, k_2 = \frac{kx_2 + m}{x_2 + 2}$,

$$\begin{aligned} \text{故 } k_1 + k_2 &= \frac{kx_1 + m}{x_1 + 2} + \frac{kx_2 + m}{x_2 + 2} = \frac{2kx_1x_2 + 2k(x_1 + x_2) + m(x_1 + x_2) + 4m}{x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} \\ &= \frac{8km^2 - 24k - 16k^2m - 8km^2 + 16k^2m + 12m}{4m^2 - 12 - 16km + 16k^2 + 12} \\ &= \frac{3m - 6k}{m^2 - 4km + 4k^2}, \dots\dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

由 $k \cdot k_1 + k \cdot k_2 + 3 = 0$, 得 $k(k_1 + k_2) + 3 = 0$, 得 $m^2 - 3km + 2k^2 = 0$,

故 $(m - 2k)(m - k) = 0 \Rightarrow m = 2k$ 或 $m = k$, $\dots\dots\dots 9$ 分

① 当 $m = 2k$ 时, 直线 $l: y = kx + 2k = k(x + 2)$, 过定点 $A(-2, 0)$, 与已知不符, 舍去; $\dots\dots\dots 10$ 分

② 当 $m = k$ 时, 直线 $l: y = kx + k = k(x + 1)$, 过定点 $(-1, 0)$, 即直线 l 过左焦点,

此时 $\Delta = 192k^2 - 48m^2 + 144 = 144k^2 + 144 > 0$, 符合题意.

所以 $\triangle FPQ$ 的周长为 $4a = 8$. $\dots\dots\dots 12$ 分

21. 解: (1) 由题知: $h(x) = \frac{x}{e^x} - \ln x + x$, 其定义域为 $(0, +\infty)$

$$\therefore h'(x) = \frac{1-x}{e^x} - \frac{1}{x} + 1 = \frac{(x-1)(e^x - x)}{xe^x} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

令 $\varphi(x) = e^x - x (x > 0)$, 则 $\varphi'(x) = e^x - 1 > 0$

$\therefore \varphi(x) = e^x - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore \varphi(x) > \varphi(0) = 1 > 0$

$\therefore e^x - x > 0 \dots\dots\dots 3$ 分

设 $h'(x) > 0 \Rightarrow x > 1$, $h'(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增 $\dots\dots\dots 4$ 分

$$h(x)_{\min} = h(1) = \frac{1}{e} + 1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 设 $F(x) = f(x) + g(x) = \frac{x}{e^{ax}} + \ln x - ax$

$$= e^{\ln x - ax} + \ln x - ax$$

设 $t = \ln x - ax$, 则, 易知 $G(t) = e^t + t$ 在 R 上单调递增

要使方程 $f(x) + g(x) = 0$ 有两个不同的实根, 则函数 $G(t) = e^t + t$ 存在 1 个零点 $\dots\dots\dots 6$ 分

所以函数 $t = \ln x - ax$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在 2 个零点, 设为 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < x_2$, 则

$$a \neq 0 \text{ 且 } \ln x_1 - ax_1 = 0, \ln x_2 - ax_2 = 0$$

$$\text{所以 } \ln x_1 - \ln x_2 = a(x_1 - x_2) \text{ 即 } \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = \frac{1}{a} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{要证 } x_1 + x_2 > \frac{2}{a}, \text{ 即证 } \frac{1}{a} < \frac{x_1 + x_2}{2}$$

即证

$$\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} > \frac{\ln x_1 - \ln x_2}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 - 1}{\frac{x_1}{x_2} + 1} > \frac{\ln x_1}{2} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

设 $\frac{x_1}{x_2} = m, m \in (0,1)$, 设 $\varphi(m) = \frac{m-1}{m+1} - \frac{\ln m}{2}$

所以 $\varphi'(m) = \frac{2}{(m+1)^2} - \frac{1}{2m} = \frac{-(m-1)^2}{2m(m+1)^2} < 0$

所以 $\varphi(m)$ 在 $(0,1)$ 单调递减

所以 $\varphi(m) > \varphi(1) = 0$, 即 $\frac{m-1}{m+1} - \frac{\ln m}{2} > 0$

故 $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2} \dots\dots\dots 10 \text{分}$

所以 $\frac{1}{a} < \frac{x_1 + x_2}{2}$, 即 $x_1 + x_2 > \frac{2}{a} \dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. 解: (1) 由 $\rho^2 = \frac{6}{\cos 2\theta + 2}$ 得 $\rho^2 \cos 2\theta + 2\rho^2 = 6$.

$\therefore \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(x^2 + y^2) = 6$

$\therefore x^2 - y^2 + 2x^2 + 2y^2 = 6$

$\therefore 3x^2 + y^2 = 6$

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1 \dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}m \\ y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}m \end{cases} (m \text{ 为参数})$

将 l 的参数方程代入曲线 C 的普通方程, 整理得: $m^2 - \sqrt{2}m - 1 = 0$,

$\therefore m_1 + m_2 = \sqrt{2}, m_1 m_2 = -1, \dots\dots\dots 8 \text{分}$

$\therefore |AB| = |m_1 - m_2| = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2} = \sqrt{2 + 4} = \sqrt{6} \dots\dots\dots 10 \text{分}$

23. 解: (1) 化简得: $f(x) = |x - a| + |x - 2a + 1|$.

当 $a = 3$ 时, $f(x) = |x - 3| + |x - 5| \geq |(x - 3) - (x - 5)| = 2$,

当 $3 \leq x \leq 5$ 时等号成立, 所以 $f(x)$ 的最小值为 2; $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 由基本不等式: $m\sqrt{12 - 2m} = \sqrt{m \cdot m \cdot (12 - 2m)} \leq \sqrt{\left(\frac{m + m + 12 - 2m}{3}\right)^3} = 8$,

当且仅当 $m = 12 - 2m$, 即 $m = 4$ 时, 等号成立.

又因为 $f(x) = |x - a| + |x - 2a + 1| \geq |(x - a) - (x - 2a + 1)| = |a - 1|$,

当且仅当 $(x - a)(x - 2a + 1) \leq 0$ 时, 等号成立. $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

所以, $|a - 1| > 8$

$\therefore a - 1 > 8$ 或 $a - 1 < -8$

$\therefore a > 9$ 或 $a < -7 \dots\dots\dots 10 \text{分}$

注: 第 17—23 题提供的解法供阅卷时评分参考, 考生其它解法可相应给分。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线