2023届高三第四次联考·数学试卷
参考答案

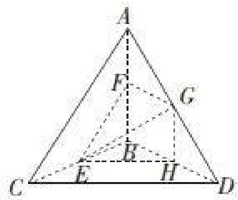
1. C　∵$A=\{x|x<-4$ 或 $x>1\}$，∴$\complement_R A=\{x|-4\leqslant x\leqslant 1\}$，∴$(\complement_R A)\cap B=\{-2,-1,1\}$.

2. B　∵$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+i}{-1+2i}=\frac{(2+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{-5i}{5}=-i$，∴$|z_1-\frac{z_1}{z_2}|=|2+i+i|=2\sqrt{2}$.

3. A　∵该正四棱台的高为$\sqrt{11-(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=3$，∴正四棱台的体积$V=\frac{1}{3}\times(2^2+2\times4+4^2)\times3=28$.

4. B　∵$a_{2n-1}+a_{2n}<0\Leftrightarrow a_1(q^{2n-2}+q^{2n-1})<0\Leftrightarrow q^{2(n-1)}(q+1)<0\Leftrightarrow q\in(-\infty,-1)$，
∴“$q<-2$”是“对任意的正整数n，$a_{2n-1}+a_{2n}<0$”的充分不必要条件.

5. C　如图，取BC，AB，AD的中点E，F，G，连接EF，FG，EG.



∵$EF/\!/AC$，$FG/\!/BD$，∴$\angle EFG$(或其补角)即为AC与BD所成的角.

∵$AB\perp$平面BCD，∴$AB\perp BC$，∴$AC=2\sqrt{5}$，则$EF=\sqrt{5}$，

∵$BC\perp CD$，∴$BD=4\sqrt{2}$，$FG=2\sqrt{2}$.

取BD的中点H，连接GH，EH，∴$HG/\!/AB$，∴$HG\perp$平面BCD，

∴$HG\perp EH$，又$GH=\frac{1}{2}AB=1$，$EH=\frac{1}{2}CD=2$，

∴$EG=\sqrt{GH^2+EH^2}=\sqrt{5}$.

∴$\cos\angle EFG=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

∴AC与BD所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

6. B　∵$\cos C=\frac{31}{32}$，∴$\cos(A+B)=-\frac{31}{32}$，$\sin C=\frac{3\sqrt{7}}{32}$，

又∵$\cos(A-B)=\frac{1}{8}$，$a>b$，∴$A>B$，∴$\sin(A-B)=\frac{3\sqrt{7}}{8}$，

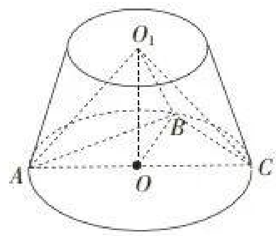
∴$\cos 2B=\cos[(A+B)-(A-B)]=-\frac{31}{32}\times\frac{1}{8}+\frac{3\sqrt{7}}{32}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{1}{8}$，

∴$\sin^2 B=\frac{7}{16}$，$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\cos B=\frac{3}{4}$，

$\sin A=\sin(B+C)=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{31}{32}+\frac{3}{4}\times\frac{3\sqrt{7}}{32}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$.

∵$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，∴$b=8$，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times8\times10\times\frac{3\sqrt{7}}{32}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$.

7. B　如图，连接 AB，BC，OO_1，BO，易知 $OO_1\perp$底面 ABC，



$\because O_1A\perp O_1C$，$O_1A=O_1C=2\sqrt{2}$，$\therefore AC=4$，$OO_1=2$，

$\because B$ 为圆弧 AC 上靠近点 C 的一个三等分点，

$\therefore \angle BOC=\frac{\pi}{3}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$. 来源微信公众号：高三答案

$\because AC$ 为圆 O 的一条直径，$\therefore \angle ABC=\frac{\pi}{2}$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，

$\because OO_1\perp$底面 ABC，$\therefore$三棱锥 O_1-ABC 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times2\times2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\because O_1$ 是圆 O_1 的圆心，A，B，C 都在圆 O 上，$\therefore O_1A=O_1C=O_1B=2\sqrt{2}$，

$\therefore S_{\triangle O_1BC}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$.

设点 A 到平面 CBO_1 的距离为 d，$\because \frac{1}{3}\times\sqrt{7}\times d=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$解得 $d=\frac{4\sqrt{21}}{7}$.

8. B　设 $f(x)=e^x-x-1$，$\because f'(x)=e^x-1$，

$\therefore$当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

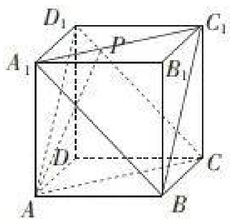
$\therefore$当 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$ 时，$f(x)>f(0)=0$，即 $e^x>x+1$.

$\because a=3e^{-0.3}>3\times(-0.3+1)=2.1$，$b=e^{0.6}>0.6+1=1.6$，$\therefore c=1.6$ 最小，

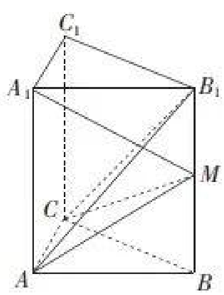
又$\because \frac{b}{a}=\frac{e^{0.6}}{3e^{-0.3}}=\frac{e^{0.9}}{3}<\frac{e}{3}<1$，$\therefore b<a$. 综上可知，$c<b<a$.

9. ABD　$\because AA_1$ 与 CC_1 平行且相等，得四边形 ACC_1A_1 为平行四边形，$\therefore A_1C_1/\!/AC$，$\because AC\not\subset$平面 A_1BC_1，$A_1C_1\subset$平面 A_1BC_1，$\therefore AC/\!/$平面 A_1BC_1，同理可得 $AD_1/\!/$平面 A_1BC_1.

$\because AD_1$，AC 是平面 AD_1C 内两条相交直线，$\therefore$平面 $AD_1C/\!/$平面 A_1BC_1，又 $AP\subset$平面 AD_1C，$\therefore AP/\!/$平面 A_1BC_1.



10. ABC　由题设，可得直三棱柱，如图.

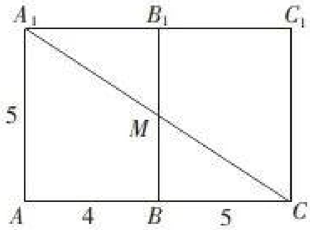


由直三棱柱的结构特征知 AM 与 A_1C_1 是异面直线，A 项正确；

因为 $AA_1\perp AC$，$BA\perp AC$，且 $AA_1\cap BA=A$，所以 $AC\perp$平面 AA_1B_1B，又 $A_1M\subset$平面 AA_1B_1B，故 $AC\perp A_1M$，B 项正确；

由图知，平面 AB_1C 将三棱柱截成四棱锥 $B_1-ACC_1A_1$ 和三棱锥 B_1-ABC，一个五面体和一个四面体，C 项正确；

将平面 AA_1B_1B 和平面 CC_1B_1B 展开，展开为一个平面，如下图，



当 A_1,M,C 共线时,A_1M+MC 的最小值为 $\sqrt{106}$,D 项错误.

11. ABC　$\because\begin{cases}A+1=3\\A-1=1\end{cases}$,$\therefore A=2$,$\therefore f(x)=2\cos(2x+\varphi)-1$,

又$\because |f(0)|=|2\cos\varphi-1|=2$,$0<\varphi<\pi$,$\therefore \varphi=\dfrac{2\pi}{3}$,

$\therefore g(x)=2\sin(2x-\dfrac{2}{3}\pi)$,其图象对称轴为 $2x-\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,当 $k=-1$ 时,$x=\dfrac{\pi}{12}$,

$\therefore$A 项正确;

$\because 2x-\dfrac{2\pi}{3}=k\pi$,$x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,$\therefore g(x)$的图象关于点$(\dfrac{\pi}{3},0)$对称,$\therefore$B 项正确;

$\because$函数 $g(x)$的单调递减区间为$-\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{2}{3}\pi\leqslant-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore -\dfrac{5}{12}\pi+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{12}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,$\therefore$当 $k=0$ 时,$g(x)$在$[0,\dfrac{\pi}{12}]$上单调递减,$\therefore$C 项正确;

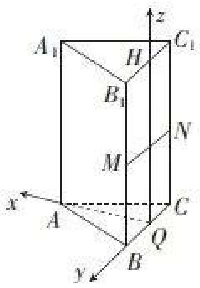
$\because f(x+\dfrac{\pi}{6})+1=2\cos(2x+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3})=-2\cos 2x\neq g(x)$,$\therefore$D 项错误.

12. ABC　易知,点 P 在矩形 BCC_1B_1 内部(含边界).

对于 A 项,当 $\lambda=1$ 时,$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{CC_1}$,即此时 $P\in$线段 CC_1,$\triangle AB_1P$ 的周长不是定值,故 A 项错误;

对于 B 项,当 $\mu=1$ 时,$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_1}+\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$,故此时 P 点的轨迹为线段 B_1C_1,而 $B_1C_1/\!/BC$,所以 $B_1C_1/\!/$平面 A_1BC,则点 P 到平面 A_1BC 的距离为定值,所以其体积为定值,故 B 项错误;

对于 C 项,当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时,$\overrightarrow{BP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$,取 BC,B_1C_1 的中点分别为 Q,H,则$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BQ}+\mu\overrightarrow{QH}$,所以 P 点的轨迹为线段 QH,不妨建系解决,建立如图所示的空间直角坐标系,$A_1(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,1)$,$P(0,0,\mu)$,$B(0,\dfrac{1}{2},0)$,则$\overrightarrow{A_1P}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,\mu-1)$,$\overrightarrow{BP}=(0,-\dfrac{1}{2},\mu)$,$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{BP}=\mu(\mu-1)=0$,所以 $\mu=0$ 或 $\mu=1$,故 H,Q 均满足,故 C 项错误;

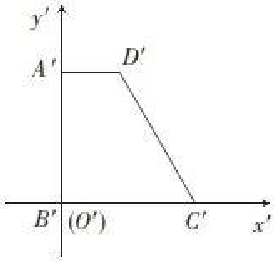


对于 D 项,当 $\mu=\dfrac{1}{2}$ 时,$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$,取 BB_1,CC_1 的中点为 M,N,$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BM}+\lambda\overrightarrow{MN}$,

所以 P 点的轨迹为线段 MN,设 $P(0,y_0,\dfrac{1}{2})$,因为 $A(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0)$,所以$\overrightarrow{AP}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},y_0,\dfrac{1}{2})$,

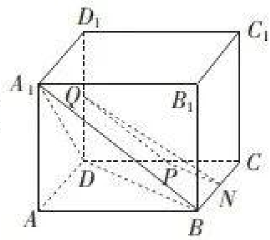
$\overrightarrow{A_1B}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1)$，所以$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{2}=0\Rightarrow y_0=-\frac{1}{2}$，此时点 P 与 N 重合，故 D 项正确.

13. $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\because BC=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore S=\frac{1}{2}(A'D'+B'C')\cdot A'B'=\frac{1}{2}\times(2+\frac{\sqrt{2}}{2})\times 2=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.



14. $(2,-2)$(答案不唯一) 设 $\boldsymbol{c}=(x,y)$，$\because \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=x+2y$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-2x-y$，$\therefore x+2y=-2x-y$，$\therefore x+y=0$，不妨取 $\boldsymbol{c}=(2,-2)$(答案不唯一).

15. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 取 CD 的中点 P，DD_1 的中点 Q，连接 PQ，PN，QN，如图所示.



$\because P,N$ 分别为 CD,BC 的中点，$\therefore PN/\!/BD$，

同理，P,Q 分别为 CD,DD_1 的中点，$\therefore PQ/\!/D_1C/\!/A_1B$.

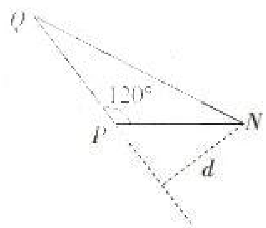
又$\because PQ\cap PN=P$，$PQ,PN\subset$平面 PQN，$A_1B\cap BD=B$，$A_1B,BD\subset$平面 A_1BD.

$\therefore$平面 $PQN/\!/$平面 A_1BD. $\because MN/\!/$平面 A_1BD，

$\therefore MN\subset$平面 PQN. 又点 M 在平面 DCC_1D_1 内运动.

$\therefore$点 M 在平面 PQN 和平面 DCC_1D_1 的交线上，即 $M\in PQ$.

在$\triangle PQN$ 中，$PN=\sqrt{2}$，$PQ=\frac{1}{2}CD_1=\sqrt{2}$，$QN=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{6}$.



$\therefore\cos\angle NPQ=\frac{PN^2+PQ^2-QN^2}{2PQ\times PN}=-\frac{1}{2}$，$\therefore\angle NPQ=120°$，

$\therefore N$ 点到 PQ 的最小距离 $d=PN\cdot\sin(180°-120°)=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore$线段 MN 的最小值为$\frac{\sqrt{6}}{2}$.

16. $(-\frac{3}{8},\frac{11}{24})$ $\because \frac{a_{n+2}}{2^{n+1}a_na_{n+1}}=\frac{n+2}{2^{n+1}\cdot n\cdot(n+1)}=\frac{1}{2^n\cdot n}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$，

$\therefore T_n=(\frac{1}{2^1\times 1}-\frac{1}{2^2\times 2})+(\frac{1}{2^2\times 2}-\frac{1}{2^3\times 3})+\cdots+(\frac{1}{2^n\cdot n}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$，

$\because T_n+(-1)^{n+1}\cdot\lambda>0$，$\therefore(-1)^{n+1}\cdot\lambda>\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}-\frac{1}{2}$.

当 n 是正奇数时，$\lambda>\frac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}-\frac{1}{2}$，

$\because \dfrac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{2^2\times2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{8}$，$\therefore \lambda>-\dfrac{3}{8}$；

当 n 是正偶数时，$\lambda<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}$，

$\because \dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^{n+1}\cdot(n+1)}\geqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2^3\times3}=\dfrac{11}{24}$，$\therefore \lambda<\dfrac{11}{24}$.

综上可知，实数 λ 的取值范围为 $(-\dfrac{3}{8},\dfrac{11}{24})$.

17. 解：(1) $\because BC/\!/AD$，$AD\perp$平面 ABP，$\therefore BC\perp$平面 ABP，

$\therefore BC\perp BP$，$\therefore \angle PBC=90^\circ$，同理可得 $\angle PDC=90^\circ$，

$\therefore S_{表}=S_{底}+S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PDC}+S_{\triangle PAD}$

$=1\times\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\times(1\times\sqrt{3}+1\times2+\sqrt{2}\times\sqrt{3}+1\times1)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ························ 5 分

(2) $\because PA\perp$平面 $ABCD$，$CD\subset$平面 $ABCD$，$\therefore CD\perp PA$，

又四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore CD\perp AD$，$\because PA\cap AD=A$，$\therefore CD\perp$平面 PAD.

$\because AF\subset$平面 PAD，$\therefore AF\perp CD$，$\because PA=AD$，点 F 是 PD 的中点，$\therefore AF\perp PD$.

又 $CD\cap PD=D$，$\therefore AF\perp$平面 PDC，$\because PE\subset$平面 PDC，$\therefore PE\perp AF$. ················· 10 分

18. 解：(1) $\because a_{n+1}+a_n=2n+5$，

$\therefore a_{n+1}+a_{n+2}=2n+7$，且 $a_{n+2}-a_n=2$，

$\therefore \{a_n\}$的奇数项与偶数项各自成等差数列且公差均为 2.

$\because a_1=3$，则 $a_2=4$.

$\therefore a_{2n-1}=a_1+2(n-1)=2n+1=2n-1+2\Rightarrow a_n=n+2$($n$ 为奇数)；

$\therefore a_{2n}=a_2+2(n-1)=2n+2\Rightarrow a_n=n+2$($n$ 为偶数).

综上可知，$a_n=n+2$，$n\in\mathbf{N}^*$. ··· 6 分

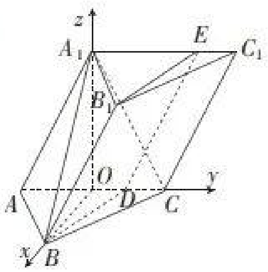
(2) 由(1)得 $b_n=\begin{cases}1, n=1\\ \log_{(n+1)}(n+2), n\geqslant2, n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$，

$\therefore b_1b_2b_3\cdots b_k=\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\cdots\cdot\log_{(k+1)}(k+2)=\log_3(k+2)=3$，解得 $k=25$. ······ 12 分

19. 解：(1) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1/\!/BB_1$，又 $BB_1\not\subset$平面 ACC_1A_1，$AA_1\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $BB_1/\!/$平面 ACC_1A_1，又因为平面 $B_1BDE\cap$平面 $ACC_1A_1=DE$，所以 $BB_1/\!/DE$. ··· 4 分

(2) 选条件①②. 连接 A_1C，取 AC 的中点 O，连接 A_1O，BO.

在菱形 ACC_1A_1 中，$\angle A_1AC=60^\circ$，所以 $\triangle A_1AC$ 为等边三角形.



又因为 O 为 AC 的中点，所以 $A_1O\perp AC$，又因为平面 $ABC\perp$平面 ACC_1A_1，

平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$，$A_1O\subset$平面 ACC_1A_1，且 $A_1O\perp AC$，

所以 $A_1O\perp$平面 ABC，又 $OB\subset$平面 ABC，所以 $A_1O\perp OB$.

又因为 $AB=BC$，所以 $BO\perp AC$.

以 O 为原点，以 OB，OC，OA_1 为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，

则 $O(0,0,0)$，$A(0,-2,0)$，$A_1(0,0,2\sqrt{3})$，$B(3,0,0)$，$D(0,1,0)$.

所以$\overrightarrow{BD}=(-3,1,0)$，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AA_1}=(0,2,2\sqrt{3})$.

设平面 B_1BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}-3x_1+y_1=0\\ 2y_1+2\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

令 $z_1=-\sqrt{3}$，则 $y_1=3$，$x_1=1$，故 $\boldsymbol{n}=(1,3,-\sqrt{3})$.

又因为$\overrightarrow{AB}=(3,2,0)$，设直线 AB 与平面 B_1BDE 所成的角为 θ，

所以 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{9}{13}$，所以直线 AB 与平面 B_1BDE 所成角的正弦值为$\dfrac{9}{13}$. ………………………………………………………………………… 12 分

选条件②③. 连接 A_1C，取 AC 的中点 O，连接 A_1O，BO.

在菱形 ACC_1A_1 中，$\angle A_1AC=60°$，所以$\triangle A_1AC$ 为等边三角形.

又 O 为 AC 的中点，故 $A_1O\perp AC$，且 $A_1O=2\sqrt{3}$，又因为 $OB=3$，$A_1B=\sqrt{21}$，

所以 $A_1O^2+OB^2=A_1B^2$，所以 $A_1O\perp OB$. 微信搜《高三答案公众号》

又因为 $AC\cap OB=O$，所以 $A_1O\perp$平面 ABC.

以下同选①②. ………………………………………………………………………… 12 分

选条件①③. 取 AC 的中点 O，连接 BO，A_1O.

在$\triangle ABC$ 中，因为 $BA=BC$，所以 $BO\perp AC$，且 $AO=2$，$OB=3$.

又因为平面 $ABC\perp$平面 ACC_1A_1，平面 $ABC\cap$平面 $ACC_1A_1=AC$，

所以 $BO\perp$平面 ACC_1A_1. 因为 $OA_1\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $BO\perp OA_1$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle BOA_1$ 中，$OA_1=2\sqrt{3}$，又因为 $OA=2$，$AA_1=4$.

所以 $OA_1^2+OA^2=AA_1^2$，所以 $A_1O\perp AO$.

以下同选①②. ………………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为$\triangle ABC$ 是正三角形，点 E 是 BC 的中点，所以 $AE\perp BC$.

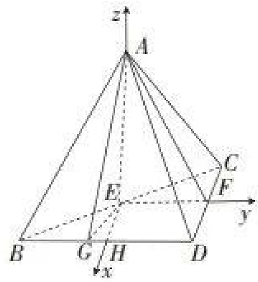
又因为平面 $ABC\perp$平面 BCD，平面 $ABC\cap$平面 $BCD=BC$，$AE\subset$平面 ABC，

所以 $AE\perp$平面 BCD，又因为 $CD\subset$平面 BCD，所以 $CD\perp AE$.

因为点 E，F 分别是 BC，CD 的中点，所以 $EF/\!/BD$，

又因为 $BD\perp CD$，所以 $CD\perp EF$，又因为 $CD\perp AE$，$AE\cap EF=E$，

$AE\subset$平面 AEF，$EF\subset$平面 AEF，所以 $CD\perp$平面 AEF. ……… 5 分



(2)在平面 BCD 中，过点 E 作 $EH\perp BD$，垂足为 H，

设 $BC=4$，则 $EA=2\sqrt{3}$，$DF=FC=1$，$EF=\sqrt{3}$.

以$\{\overrightarrow{EH},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EA}\}$为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，

则 $E(0,0,0)$，$A(0,0,2\sqrt{3})$，$C(-1,\sqrt{3},0)$，$D(1,\sqrt{3},0)$，

设 $G(1,y,0)$，则$\overrightarrow{EA}=(0,0,2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(1,\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{EG}=(1,y,0)$.

设平面 AEG 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EA}=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{EG}=0\end{cases}$,得 $\begin{cases}2\sqrt{3}z_1=0\\ x_1+yy_1=0\end{cases}$,令 $y_1=-1$,故 $\boldsymbol{n}_1=(y,-1,0)$,

设平面 ACD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}2x_2=0\\ x_2+\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$,令 $z_2=1$,则 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$.

设平面 AEG 与平面 ACD 所成锐二面角的平面角为 θ,

所以 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\dfrac{-2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{y^2+1}}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{y^2+1}}$,当 $y=0$ 时,$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,此时最大,

故当 G 为 BD 的中点时,平面 AEG 与平面 ACD 所成锐二面角的余弦值最大. …… 12 分

21. 解:(1)如图所示:

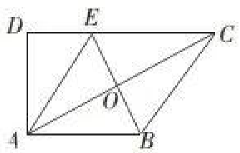


图 1

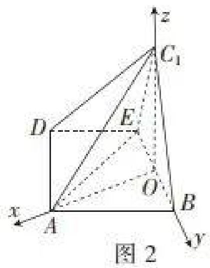


图 2

在图 1 中,连接 AC,交 BE 于 O.因为四边形 $ABCE$ 是边长为 2 的菱形,并且 $\angle BCE=60°$,

所以 $AC\perp BE$,且 $OA=OC=\sqrt{3}$.

在图 2 中,相交直线 OA,OC_1 均与 BE 垂直.所以 $\angle AOC_1$ 是二面角 $A-BE-C_1$ 的平面角,

因为 $AC_1=\sqrt{6}$,所以 $OA^2+OC_1^2=AC_1^2$,$OA\perp OC_1$,所以平面 $BC_1E\perp$ 平面 $ABED$. …… 5 分

(2)由(1)知,分别以 OA,OB,OC_1 为 x,y,z 轴建立如图 2 所示的空间直角坐标系.

则 $D(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0)$,$C_1(0,0,\sqrt{3})$,$A(\sqrt{3},0,0)$,$B(0,1,0)$,$E(0,-1,0)$,

$\overrightarrow{DC_1}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AD}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2},0)$,$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{AC_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},-1,0)$.设 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC_1}$,$\lambda\in[0,1]$,

则 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC_1}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}\lambda)$.

设平面 ABC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ -\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\end{cases}$,取 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$,

因为点 P 到平面 ABC_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,

所以 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,

则$\overrightarrow{AP}=(-\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$，所以$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}=(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

设直线 EP 与平面 ABC_1 所成的角为 θ，

所以直线 EP 与平面 ABC_1 所成角的正弦值为 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EP}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

…………………………………………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. 来源微信公众号：高三答案

$\because f'(x)=\ln^2x+1+x[(2\ln x)\cdot\frac{1}{x}]=(\ln x+1)^2\geqslant0$，

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$. ………………………………………………………… 3 分

(2) 由题可得 $f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\times(\ln\frac{1}{e})^2+\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$，

若 $x_2>x_1\geqslant\frac{1}{e}$，则必有 $f(x_2)>f(x_1)\geqslant f(\frac{1}{e})=\frac{2}{e}$，则 $f(x_1)+f(x_2)>\frac{4}{e}$；

若 $\frac{1}{e}\geqslant x_2>x_1>0$，则必有 $f(x_1)<f(x_2)\leqslant f(\frac{1}{e})=\frac{2}{e}$，则 $f(x_1)+f(x_2)<\frac{4}{e}$.

$\therefore$ 若 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{4}{e}$，则 $0<x_1<\frac{1}{e}<x_2$.

要证 $\ln(x_1+x_2)>\ln 2-1$，只需证 $x_1+x_2>\frac{2}{e}$，只需证 $x_2>\frac{2}{e}-x_1$，

即证 $f(x_2)>f(\frac{2}{e}-x_1)$，又 $f(x_2)=\frac{4}{e}-f(x_1)$，故只需证 $\frac{4}{e}-f(x_1)>f(\frac{2}{e}-x_1)$.

令 $g(x)=f(x)+f(\frac{2}{e}-x)-\frac{4}{e}\ (0<x<\frac{1}{e})$，

则 $g'(x)=f'(x)-f'(\frac{2}{e}-x)=(\ln x+1)^2-[\ln(\frac{2}{e}-x)+1]^2$

$=[\ln x-\ln(\frac{2}{e}-x)][\ln x+\ln(\frac{2}{e}-x)+2]$.

$\because 0<x<\frac{1}{e}$，$\therefore \frac{2}{e}-x>\frac{1}{e}>x$，$\therefore \ln x-\ln(\frac{2}{e}-x)<0$，

且 $\ln x+\ln(\frac{2}{e}-x)+2=\ln[x(\frac{2}{e}-x)]+2<\ln(\frac{x+\frac{2}{e}-x}{2})^2+2=0$，

$\therefore g'(x)=[\ln x-\ln(\frac{2}{e}-x)][\ln x+\ln(\frac{2}{e}-x)+2]>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,\frac{1}{e})$ 上单调递增.

$\because g(\frac{1}{e})=0$，$\therefore g(x)<g(\frac{1}{e})=0$，$\therefore f(x_1)+f(\frac{2}{e}-x_1)-\frac{4}{e}<0$，$\therefore \frac{4}{e}-f(x_1)>f(\frac{2}{e}-x_1)$，

$\therefore x_1+x_2>\frac{2}{e}$，$\therefore \ln(x_1+x_2)>\ln 2-1$. ……………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。