

绝密★启用前

2021 年高考精准备考原创押题卷(三) · 数学(理科)

[满分 150 分,用时 120 分钟]

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的学校、姓名、班级、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成,答在本试卷上无效。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用 0.5 毫米及以上黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

参考公式:锥体的体积公式: $V=\frac{1}{3}Sh$ (其中 S 为锥体的底面积, h 为锥体的高)

一、选择题(本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 集合 $A=\{x|x>0\}$, $B=\{-2,-1,0,2\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}}A)\cap B=$ ()
A. $\{0,2\}$ B. $\{-2,-1\}$ C. $\{-2,-1,0\}$ D. $\{2\}$
2. 已知锐角 α 满足 $\frac{2\cos\alpha+\sin\alpha}{2\cos\alpha-\sin\alpha}=-5$, 则 $\cos 2\alpha$ 的值为 ()
A. $\frac{4}{5}$ B. $-\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $-\frac{3}{5}$
3. 某市在创建“全国卫生文明城市”活动中,大力加强垃圾分类投放宣传力度。某居民小区设有“厨余垃圾”“可回收垃圾”“其他垃圾”三种不同的垃圾桶。一天,居民小贤提着上述分好类的垃圾各一袋,随机每桶投一袋,则恰好有一袋垃圾投对的概率为 ()



- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$
4. “中国剩余定理”又称“孙子定理”,讲的是一个关于整除的问题。现有这样一个整除问题:将 1 到 2 021 这 2 021 个数中,能被 3 整除余 2 且被 5 整除余 2 的数按从小到大的顺序排成一列,构成数列 $\{a_n\}$, 则此数列所有项中,中间项的值为 ()
A. 992 B. 1 007 C. 1 022 D. 1 037
5. 复数 z 满足 $z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} - 17 = 0$, 则 $|z+3-2i|$ 的最大值为 ()
A. $\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}$
6. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1, F_2 , 点 M 为双曲线 C 左支上的一点, $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$, MF_2 与双曲线的右支交于点 N , 且满足 $4|NF_1| = 5|MN|$, 则双曲线 C 的离心率是 ()
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$
7. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \leq 0, \\ mx-y \leq 0, \\ x+y \leq 1, \end{cases}$ 其中 $m < -1$, 若目标函数 $z = \frac{y}{x-m}$ 的最大值为 2, 则 $m =$ ()
A. -2 B. -2 或 $-\frac{3}{2}$ C. -2 或 $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

【2021 年高考精准备考原创押题卷(三) · 数学(理科) 第 1 页

官方微信公众号: ZIZZSW

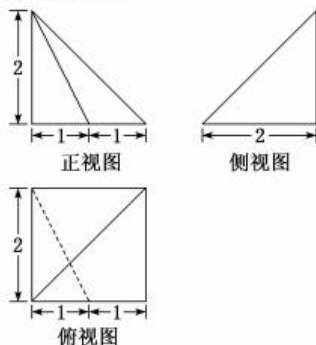
咨询热线: 010-5601

9830

官方网站: www.zizzs.com

微信客服: zizzs2018

8. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积为 ()



- A. 2 B. 4 C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{22}{3}$
9. 在平面直角坐标系中, 从点 $P(-3, 2)$ 向直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 作垂线, 垂足为 M , 则点 $Q(2, 4)$ 与点 M 的距离的最小值是 ()
- A. $5 - 2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. 17
10. 设函数 $f(x) = \ln|3x + 1| + \ln|3x - 1|$, 则 $f(x)$ ()

- A. 是偶函数, 且在 $(-\infty, -\frac{1}{3})$ 上单调递增 B. 是奇函数, 且在 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 上单调递减
- C. 是偶函数, 且在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上单调递增 D. 是奇函数, 且在 $(-\infty, -\frac{1}{3})$ 上单调递减

11. 牙雕套球又称“鬼工球”, 取鬼斧神工的意思, 制作相当繁复, 工艺要求极高. 明代曹昭在《格古要论·珍奇·鬼工毬》中写道: “尝有象牙圆毬儿一箇, 中直通一窍, 内车数重, 皆可转动, 故谓之鬼工毬.” 现有某“鬼工球”, 由外及里是两层表面积分别为 $100\pi \text{ cm}^2$ 和 $64\pi \text{ cm}^2$ 的同心球 (球壁的厚度忽略不计), 在外球表面上有一点 A , 在内球表面上有一点 B , 连接线段 AB , 若线段 AB 不穿过小球内部, 则线段 AB 长度的最大值是 ()



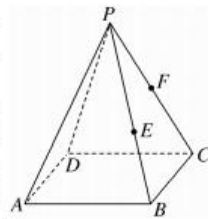
- A. $\sqrt{41} \text{ cm}$ B. 9 cm
- C. 3 cm D. 2 cm
12. 已知函数 $f(x)$ 满足: ① 对任意 $0 \leq x_1 < x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$; ② 函数 $y = f(x + 2)$ 的图象关于点 $(-2, 0)$ 对称. 若实数 a, b 满足 $f(a^2 + 2b) \leq -f(-b^2 - 2a)$, 则当 $a \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时, $\frac{a}{a+b}$ 的取值范围为 ()
- A. $[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}]$ B. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ C. $[\frac{1}{2}, 1]$ D. $[2, 4]$

二、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 若向量 a, b, c 满足 $a + b + c = 0$, $|a| = |b| = 1$, 则 $(a - b) \cdot c =$ _____.
14. 若二项式 $(1 + 2x)^n (n \in \mathbb{N}^*)$ 的展开式中所有项的二项式系数和为 32, 则该二项式展开式中含有 x^3 项的系数为 _____.
15. 下面的数表为“森德拉姆筛”, 其特点是表中的每行每列上的数都成等差数列, 则第 n 行第 n 个数字是 _____.

2	3	4	5	...
3	5	7	9	...
4	7	10	13	...
5	9	13	17	...
...	...	...	...	...

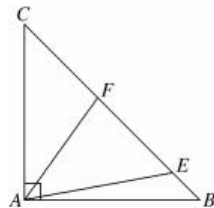
16. 在通用技术课上,老师给同学们提供了一个如图所示的木质正四棱锥模型 $P-ABCD$,并要求同学们将该四棱锥切割成三个小四棱锥.某小组经讨论后给出如下方案:第一步,过点 A 作一个平面分别交 PB, PC, PD 于点 E, F, G ,得到四棱锥 $P-AEFG$;第二步,将剩下的几何体沿平面 ACF 切开,得到另外两个小四棱锥.在实施第一步的过程中,为方便切割,需先在模型表面画出截面四边形 $AEFG$,若 $\frac{PE}{PB} = \frac{3}{5}, \frac{PF}{PC} = \frac{1}{2}$,则 $\frac{PG}{PD}$ 的值为_____.



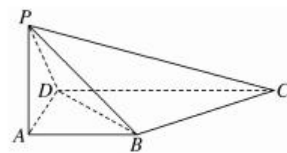
三、解答题(共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答)

(一)必考题(共 60 分)

17. (12 分)如图,在 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp AC, AB = AC = 2$,点 E, F 是线段 BC (含端点)上的动点,且点 E 在点 F 的右下方,在运动的过程中,始终保持 $\angle EAF = \frac{\pi}{4}$ 不变,设 $\angle EAB = \theta$.
- (1)写出 θ 的取值范围,并分别求线段 AE, AF 关于 θ 的函数关系式;
- (2)求 $\triangle EAF$ 面积 S 的最小值.

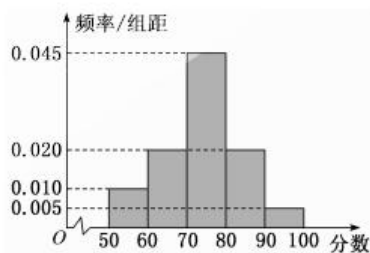


18. (12 分)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AB \parallel DC, \angle BAD = 90^\circ, PD = DC = BC = 2PA = 2AB = 2, PD \perp DC$.
- (1)求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;
- (2)设 $\vec{BM} = \lambda \vec{BD} (0 < \lambda < 1)$,当二面角 $A-PM-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$ 时,求 λ 的值.



19. (12 分)已知椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个焦点与抛物线 $C_2: y^2 = 2ax$ 的焦点 F 重合,两条曲线在第一象限内的交点 M 满足 $|MF| = \frac{5}{3}$.
- (1)求椭圆 C_1 以及抛物线 C_2 的标准方程;
- (2)过椭圆另一焦点 E 作直线 l (斜率存在但不为 0) 与椭圆相交于 A, B 两点,在椭圆长轴上取一点 P ,使得 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ 为定值,试求点 P 的坐标及这个定值.

20. (12 分)某校为了解该校学生“停课不停学”的网络学习效率,随机抽查了高一年级 100 位学生的某次数学成绩,得到如图所示的频率分布直方图.
- (1)估计这 100 位学生的数学成绩的平均值 $\bar{x}$ (同一组中的数据用该组区间的中点值代表);
- (2)根据整个年级的数学成绩,可以认为学生的数学成绩 X 近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,经计算(1)问中样本标准差 s 的近似值为 10.用样本平均数 $\bar{x}$ 作为 μ 的近似值,用样本标准差 s 作为 σ 的估计值,现任抽取一位学生,求他的数学成绩恰在 64 分到 94 分之间的概率;



(3)该年级1班的数学老师为了能每天督促学生的网络学习,提高学生每天的作业质量及学习数学的积极性,特意在微信上设计了一个每日作业小程序,每当学生提交的作业获得优秀时,就有机会参与一次小程序中“玩游戏,得奖励积分”的活动,开学后可根据获得积分的多少领取老师相应的小奖品.小程序页面上有一列方格,共15格,刚开始有只小兔子在第1格,每点一下游戏的开始按钮,小兔子就沿着方格跳一下,每次跳1格或跳2格,概率均为 $\frac{1}{2}$,依次点击游戏的开始按钮,直到小兔子跳到第14格(奖励0分)或第15格(奖励5分)时,游戏结束,每天的积分自动累加,设小兔子跳到第 $n(1 \leq n \leq 14)$ 格的概率为 P_n ,试证明 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 是等比数列,并求 P_{15} 的值.(获胜的概率)
参考数据:若随机变量 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$,则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$, $P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$, $P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

21. (12分)已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{1}{2}kx^2 - x$, $g(x) = \ln x - kx$.

(1)当 $k=1$ 时,求 $g(x)$ 的最大值;

(2)当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时,

(i)判断函数 $g(x)$ 的零点个数;

(ii)求证: $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,且 $\frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{f(x_2)}{x_2} > -1$.

(二)选考题(共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分)

22. [选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos^k t, \\ y = \sin^k t \end{cases}$ (t 为参数),以坐标原点为极点, x 轴的正半轴

为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $2\rho \cos \theta - 3\rho \sin \theta - 12 = 0$.

(1)当 $k=2$ 时,求出 C_1 的普通方程,并说明该曲线的图形形状.

(2)当 $k=1$ 时, P 是曲线 C_1 上的一点, Q 是曲线 C_2 上的一点,求 PQ 的最小值.

23. [选修4-5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x) = |ax - 1|$.

(1)当 $a=2$ 时,求不等式 $f(x) > 2 - |x + 1|$ 的解集;

(2)若 $x \in (1, 2)$ 时,不等式 $f(x) + |x - 1| > x$ 成立,求实数 a 的取值范围.



2021 年高考精准备考原创押题卷(三)·数学(理科)参考答案

1. 选 C 据题意 $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, 0]$, 所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{-2, -1, 0\}$, 故选 C.

2. 选 B 法一: 由 $\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha} = -5$ 可知 $\sin\alpha = 3\cos\alpha$,

又 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\therefore \sin^2\alpha = \frac{9}{10}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{10}$, $\therefore \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\frac{4}{5}$, 故选 B.

法二: 由 $\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha} = -5$ 可知 $\sin\alpha = 3\cos\alpha$, 即 $\tan\alpha$

$= 3$, 则 $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

$= \frac{1 - 9}{1 + 9} = -\frac{4}{5}$, 故选 B.

3. 选 D 3 袋垃圾中恰有 1 袋投放正确的情形有 $C_3^1 A_1^1 = 3$ 种情形, 由古典概型计算公式得三袋恰投对一袋垃圾的概率为 $P = \frac{C_3^1 A_1^1}{A_3^3} = \frac{1}{2}$, 故选 D.

4. 选 B 由题意可知, $a_n - 2$ 既是 3 的倍数, 又是 5 的倍数, 所以是 15 的倍数, 即 $a_n - 2 = 15(n-1)$, 所以 $a_n = 15n - 13$,

当 $n = 135$ 时, $a_{135} = 15 \times 135 - 13 = 2012 < 2021$,

当 $n = 136$ 时, $a_{136} = 15 \times 136 - 13 = 2027 > 2021$,

故 $n = 1, 2, 3, \dots, 135$, 数列 $\{a_n\}$ 共有 135 项, 因此数列中间项为第 68 项, 且 $a_{68} = 15 \times 68 - 13 = 1007$,

故中间项的值为 1007, 故选 B.

5. 选 D 设复数 z 在复平面上的对应点为 $Z(x, y)$,

由 $z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} = 17$ 可得 $x^2 + y^2 + 2x = 17$,

即 $(x+1)^2 + y^2 = 18$,

所以点 Z 的轨迹是以 $(-1, 0)$ 为圆心, $3\sqrt{2}$ 为半径的圆, 圆心到点 $(-3, 2)$ 的距离为

$d = \sqrt{(-3+1)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$,

所以 $|z+3-2i|$ 的最大值为 $r+d = 5\sqrt{2}$, 故选 D.

6. 选 D 如图, 设点 M 在 x 轴上方,

求比值可以用特殊值, 故设 $|MN|$

$= 4$, 则 $|NF_1| = 5$, 又 $\angle F_1 M F_2 = 90^\circ$, 则 $|MF_1| = 3$, 再设 $|NF_2| =$

t , 则 $t+4-3=2a$, $5-t=2a$, 解得

$t=2$, 则 $|MF_2| = 6$, $|F_1 F_2| =$

$\sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 2c$, $2a =$

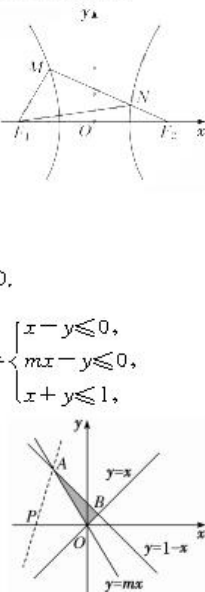
$5-t=3$, 则 $e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \sqrt{5}$, 故选 D.

7. 选 A 因为实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y \leq 0, \\ mx-y \leq 0, \\ x+y \leq 1, \end{cases}$

所以可根据约束条件给出可行域, 如图所示,

其中 $A(\frac{1}{m+1}, \frac{m}{m+1})$,

$B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $P(m, 0)$,



因为目标函数 $z = \frac{y}{x-m}$ 的几何意义是可行域内的点

(x, y) 与 $P(m, 0)$ 所连直线的斜率, 所以目标函数 $z =$

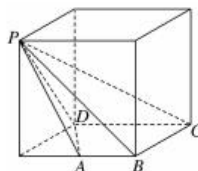
$\frac{y}{x-m}$ 的最大值为 2, 即 $k_{PA} = \frac{\frac{m}{m+1}}{\frac{1}{m+1}-m} = 2$, 整理得

$2m^2 + 3m - 2 = 0$, 解得 $m = -2$ 或 $\frac{1}{2}$ (舍去), 故选 A.

8. 选 A 根据几何体的三视图可知,

还原到正方体如图,

该几何体是底面为直角梯形(上底是 1, 下底是 2, 高是 2), 高为 2 的四棱锥 $P-ABCD$,



所以该几何体的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 \times 2 = 2$,

故选 A.

9. 选 A 由 $kx - y - 2 - k = 0$, 得 $k(x-1) - y - 2 = 0$, 所以

$\begin{cases} x-1=0, \\ -y-2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases}$ 所以直线 $kx - y - 2 - k = 0$

过定点 $N(1, -2)$.

从点 $P(-3, 2)$ 向直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 作垂线, 垂足为 M , 则 M 在以 PN 为直径的圆上, 因为 $P(-3, 2)$, $N(1, -2)$, 所以 PN 的中点为 $G(-1, 0)$, $|PN| =$

$\sqrt{(-3-1)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$, 所以圆 G 的方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 8$, 即 M 的轨迹方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 8$. 因为

$Q(2, 4)$, $(2+1)^2 + 4^2 > 8$, 所以点 $Q(2, 4)$ 在圆外, $|QG| =$

$\sqrt{(2+1)^2 + 4^2} = 5$, 所以 $|QM|_{\min} = |QG| - r = 5 - 2\sqrt{2}$, 故选 A.

10. 选 C 由 $\begin{cases} |3x+1| > 0, \\ |3x-1| > 0 \end{cases}$ 得 $x \neq \pm \frac{1}{3}$,

$\therefore f(x)$ 的定义域为

$(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, +\infty)$,

又 $f(-x) = \ln|-3x+1| + \ln|-3x-1| =$

$\ln|3x-1| + \ln|3x+1| = f(x)$,

$\therefore f(x)$ 为定义域内的偶函数, 可排除 B、D;

当 $x \in (-\infty, -\frac{1}{3})$ 时, $f(x) = \ln(-3x-1) +$

$\ln(-3x+1) = \ln(9x^2-1)$,

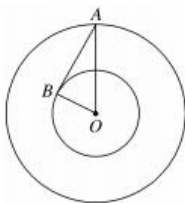
$\therefore t = 9x^2-1$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{3})$ 上单调递减, $y = \ln t$ 单调

递增, $\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{3})$ 上单调递减, 可排除 A;

$\therefore f(x)$ 为偶函数且在 $(-\infty, -\frac{1}{3})$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上单调递增, C 正确, 故选 C.

11. 选 C 因为外球的表面积为 $100\pi \text{ cm}^2$, 内球的表面积为 $64\pi \text{ cm}^2$, 所以外球的半径为 5 cm, 内球的半径为 4 cm, 如图, 以外球表面上一点 A、内球表面上一点 B 以及球心 O 作截面, 因为线段 AB



不穿过小球内部, 所以当线段 AB 与内球相切时, 线段 AB 的长度最大, 则线段 AB 最长为 $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (cm)}$, 故选 C.

12. 选 B 由对任意 $0 \leq x_1 < x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 可得 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减; 由函数 $y = f(x+2)$ 的图象关于点 $(-2, 0)$ 对称, 得函数 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称, 即函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

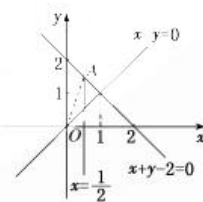
于是得 $f(a^2 + 2b) \leq f(b^2 + 2a)$, $\therefore a^2 + 2b \geq b^2 + 2a$, $\therefore b^2 - a^2 + 2a - 2b \leq 0$,

$\therefore (b-a)[b-(2-a)] \leq 0$, 则当 a

$\in [\frac{1}{2}, 1]$ 时, 令 $a=x, b=y$, 问题

等价于点 (x, y) 满足区

域 $\begin{cases} (y-x)[y-(2-x)] \leq 0, \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$



如图阴影部分, 由线性规划知识可知 $\frac{y}{x}$ 为 (x, y) 与 $(0, 0)$ 连线的斜率, 由图可得 $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} \in [1, 3]$, $\therefore \frac{a}{a+b} =$

$\frac{1}{1 + \frac{b}{a}} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. 故选 B.

13. 解析: 因为 $a+b+c=0, |a|=|b|=1$, 所以 $(a-b) \cdot c = -(a-b) \cdot (a+b) = b^2 - a^2 = |b|^2 - |a|^2 = 0$.

答案: 0

14. 解析: 因为二项式 $(1+2x)^n (n \in \mathbf{N}^+)$ 的展开式中所有项的二项式系数和为 32, 所以 $2^n = 32$, 解得 $n=5$,

所以 $(1+2x)^5$ 的展开式通项为 $T_{k+1} = C_5^k 1^{5-k} \cdot$

$(2x)^k$, 令 $k=3$ 可得 $T_4 = C_5^3 2^3 x^3 = 80x^3$,

所以该二项式展开式中含有 x^3 项的系数为 80.

答案: 80

15. 解析: 设第 n 行第 n 个数字是 a_n ,

由题意知第 n 行是首项为 $n+1$, 公差为 n 的等差数列,

所以 $a_n = (n+1) + (n-1) \times n = n^2 + 1$.

答案: $n^2 + 1$

16. 解析: 由 $\overline{AB} = \overline{DC}$ 得 $\overline{PA} = \overline{PB} - \overline{PC} + \overline{PD}$.

设 $\overline{PD} = t \overline{PG}$, $\therefore \overline{PB} = \frac{5}{3} \overline{PE}, \overline{PC} = 2 \overline{PF}$,

$\therefore \overline{PA} = \frac{5}{3} \overline{PE} - 2 \overline{PF} + t \overline{PG}$.

$\therefore E, F, G, A$ 四点共面,

$\therefore \frac{5}{3} - 2 + t = 1$, 解得 $t = \frac{4}{3}$,

$\therefore \overline{PD} = \frac{4}{3} \overline{PG}$, 故 $\frac{PG}{PD} = \frac{3}{4}$.

答案: $\frac{3}{4}$

17. 解: (1) 由题意知 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, 2分

在 $\triangle ABC$ 中, $\therefore AB \perp AC, AB = AC, \therefore \angle B = \angle C = \frac{\pi}{4}$.

$\frac{AE}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AB}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} \Rightarrow AE = \frac{\sqrt{2}}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}$, 4分

$\frac{AF}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AC}{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)} \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta}$. 6分

(2) $S_{\triangle EAF} = \frac{1}{2} AE \cdot AF \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})} \cdot$

$\frac{\sqrt{2}}{\cos \theta} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \cos \theta}$ 8分

$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2} \sin(2\theta + \frac{\pi}{4}) + 1}$ 10分

$\geq \frac{2}{\sqrt{2} + 1} = 2(\sqrt{2} - 1)$, 当且仅当 $\theta = \frac{\pi}{8}$ 时, 取“=”,

故 $\triangle EAF$ 面积 S 的最小值为 $2(\sqrt{2} - 1)$. 12分

18. 解: (1) 证明: 取 CD 的中点 E ,

连接 BE , 如图,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ, AB \parallel DC$,

$CD = 2AB$, 且 E 为 CD 的

中点,

$\therefore AB \parallel DE$ 且 $AB = DE, \therefore$ 四边形 $ABED$ 为矩形,

$\therefore BE \perp CD, CE = 1, \therefore AD = BE = \sqrt{BC^2 - CE^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore PA = 1, PD = 2, \therefore PA^2 + AD^2 = PD^2, \therefore PA \perp AD$.

2分

$\therefore PD \perp DC, AB \parallel DC, \therefore AB \perp PD$,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ, \therefore AB \perp AD$,

又 $PD \cap AD = D, PD \subset$ 平面 $PAD, AD \subset$ 平面 PAD ,

$\therefore AB \perp$ 平面 PAD ,

$\therefore PA \subset$ 平面 $PAD, \therefore PA \perp AB$.

4分

又 $\therefore PA \perp AD, AB \cap AD = A, \therefore PA \perp$ 平面 $ABCD$. 5分

(2) 由(1)可知, PA, AB, AD

两两互相垂直, 以点 A 为坐

标原点, AB, AD, AP 所在直

线分别为 x, y, z 轴建立如图

所示的空间直角坐标系

$Axyz$,

6分

则 $A(0, 0, 0), B(1, 0, 0), D(0, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, 1)$,

$\therefore \overline{BP} = (-1, 0, 1), \overline{BD} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overline{AB} = (1, 0, 0),$

$\overline{AP} = (0, 0, 1)$.



设平面 PBD 的法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{BP} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -x_1 + z_1 = 0, \\ -x_1 + \sqrt{3}y_1 = 0, \end{cases} \text{令 } y_1 = 1, \text{则 } x_1 =$$

$$z_1 = \sqrt{3}, \therefore m = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}). \quad 8 \text{ 分}$$

$$\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{BD} = \lambda(-1, \sqrt{3}, 0) = (-\lambda, \sqrt{3}\lambda, 0), \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = (1-\lambda, \sqrt{3}\lambda, 0),$$

设平面 PAM 的法向量为 $n = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} z_2 = 0, \\ (1-\lambda)x_2 + \sqrt{3}\lambda y_2 = 0, \end{cases} \text{令 } x_2 = \sqrt{3}\lambda, \text{则 } y_2 = \lambda - 1, z_2 = 0, \therefore n = (\sqrt{3}\lambda, \lambda - 1, 0). \quad 10 \text{ 分}$$

由于二面角 $A-PM-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$,

$$|\cos \langle m, n \rangle| = \frac{|m \cdot n|}{|m| \cdot |n|} = \frac{|4\lambda - 1|}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{4\lambda^2 - 2\lambda + 1}} = \frac{\sqrt{7}}{7},$$

整理可得 $2\lambda^2 - \lambda = 0$,

$$\because 0 < \lambda < 1, \text{解得 } \lambda = \frac{1}{2}. \quad 12 \text{ 分}$$

19. 解: (1) 由已知公共焦点 $F\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, 则 $c = \frac{a}{2}$,

$$\therefore b^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2, \quad 2 \text{ 分}$$

设 $M(x_0, y_0)$, 则由抛物线定义有 $|MF| = x_0 + \frac{a}{2} =$

$$\frac{5}{3}, \text{即 } x_0 = \frac{5}{3} - \frac{a}{2}, \text{则 } y_0^2 = 2a\left(\frac{5}{3} - \frac{a}{2}\right),$$

$$\because \text{点 } M \text{ 在椭圆上, 代入椭圆方程得 } \frac{\left(\frac{5}{3} - \frac{a}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{2a\left(\frac{5}{3} - \frac{a}{2}\right)}{\frac{3}{4}a^2} = 1, \text{解得 } a = 2, b = \sqrt{3}, \quad 4 \text{ 分}$$

$\therefore$ 椭圆 C_1 的标准方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 抛物线 C_2 的标准方程为 $y^2 = 4x$. 6 分

(2) 由 (1) 可知点 E 的坐标为 $(-1, 0)$, 设直线 $l: y =$

$$\begin{cases} y = k(x+1), \\ k(x+1), \text{联立} \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \end{cases}$$

消去 y 化简得 $(4k^2 + 3)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0$,

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-8k^2}{4k^2 + 3}, x_1 \cdot x_2 = \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3}, \quad 8 \text{ 分}$$

设 $P(m, 0) (-2 \leq m \leq 2)$,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (x_1 - m, y_1) \cdot (x_2 - m, y_2) \\ &= (x_1 - m, k(x_1 + 1)) \cdot (x_2 - m, k(x_2 + 1)) \\ &= (x_1 - m)(x_2 - m) + k^2(x_1 + 1)(x_2 + 1) \\ &= (1 + k^2)x_1x_2 + (k^2 - m)(x_1 + x_2) + m^2 + k^2 \\ &= (1 + k^2) \times \frac{4k^2 - 12}{4k^2 + 3} + (k^2 - m) \times \frac{-8k^2}{4k^2 + 3} + m^2 + k^2 \\ &= \frac{(4m^2 + 8m - 5)k^2 + (3m^2 - 12)}{4k^2 + 3}, \quad 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{若 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \text{ 为定值, 则 } \frac{4m^2 + 8m - 5}{4} = \frac{3m^2 - 12}{3},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{11}{8}, \text{此时 } \frac{3m^2 - 12}{3} = -\frac{135}{64},$$

$$\text{故点 } P \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{11}{8}, 0\right), \text{定值为 } -\frac{135}{64}.$$

12 分

20. 解: (1) $x = (0.01 \times 55 + 0.02 \times 65 + 0.045 \times 75 + 0.02 \times 85 + 0.005 \times 95) \times 10 = 74$, 2 分

$$(2) X \sim N(74, 10^2), \mu = 74, \sigma = 10,$$

$$\text{因为 } P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827,$$

$$P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545,$$

$$\text{所以 } P(64 < X < 94) \approx \frac{0.6827}{2} + \frac{0.9545}{2} = 0.8186.$$

6 分

(3) 证明: 小兔子开始在第 1 格, 为必然事件, $P_1 = 1$, 点一下开始按钮, 小兔子跳 1 格即移到第 2 格的概率为 $\frac{1}{2}$, 即 $P_2 = \frac{1}{2}$,

小兔子移到第 $n+1$ ($2 \leq n \leq 14$) 格的情况是下列两种, 而且也只有两种情况.

① 小兔子先跳到第 $n-1$ 格, 又点一下开始按钮跳了 2 格, 其概率为 $\frac{1}{2}P_{n-1}$;

② 小兔子先跳到第 n 格, 又点一下开始按钮跳了 1 格, 其概率为 $\frac{1}{2}P_n$,

$$\text{因为 } P_{n+1} = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_n, \text{所以 } P_{n+1} - P_n = -\frac{1}{2}(P_n - P_{n-1}), \quad 8 \text{ 分}$$

所以当 $1 \leq n \leq 14$ 时,

数列 $\{P_{n+1} - P_n\}$ 是以 $P_2 - P_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ 为首项, 以 $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

$$\text{所以 } P_{n+1} - P_n = (P_2 - P_1) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \quad 10 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_1 &= (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \dots + (P_{n+1} - P_n) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \quad (1 \leq n \leq 14). \end{aligned}$$

$$\text{所以获胜的概率 } P_{15} = \frac{2}{3} \left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{15}\right]. \quad 12 \text{ 分}$$

21. 解: $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $g'(x) = \frac{1}{x} - k = \frac{1-kx}{x}$,

当 $k > 0$ 时, 令 $g'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{k}$,

令 $g'(x) < 0$, 得 $x > \frac{1}{k}$,

故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 上单调递减.



(1) 当 $k=1$ 时, $g(x)=\ln x-x$, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,

故 $g(x)_{\max}=g(1)=-1$. 2 分

(2) (i) $\because g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{k})$ 上单调递增, 在

$(\frac{1}{k}, +\infty)$ 上单调递减, 3 分

$\therefore g(x)$ 至多有两个零点,

$\because g(\frac{1}{k})=\ln \frac{1}{k}-1>0, g(1)=-k<0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(\frac{1}{k}, 1)$ 上有一个零点: 4 分

由(1)可知 $\ln x-x \leq -1 < 0$, $\therefore \ln x < x$,

从而 $g(\frac{4}{k^2})=\ln \frac{4}{k^2}-\frac{4}{k^2}=2\ln \frac{2}{k}-\frac{4}{k^2} < 2 \times \frac{2}{k}-\frac{4}{k^2}=0$,

又 $\because g(\frac{1}{k})>0$, $\therefore g(x)$ 在 $(\frac{1}{k}, \frac{4}{k^2})$ 上有一个零点.

综上, 函数 $g(x)$ 有两个零点. 6 分

(ii) 证明: $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x)=\ln x+1-kx-1=\ln x-kx=g(x)$. 7 分

由(i)知 $g(x)$ 有两个零点, 设为 x_1, x_2 , 且 $0 < x_1 < \frac{1}{k} < x_2$, 且 $\ln x_1=kx_1, \ln x_2=kx_2$,

又 $\because g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{k})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $0 < x < x_1$, 或 $x > x_2$ 时, $g(x) < 0$;

当 $x_1 < x < x_2$ 时, $g(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 (x_1, x_2) 上单调递增, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减,

故 x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个极值点. 8 分

$\frac{f(x_1)}{x_1}=\ln x_1-\frac{1}{2}kx_1-1=\ln x_1-\frac{1}{2}\ln x_1-1=$

$\frac{1}{2}\ln x_1-1$, 同理 $\frac{f(x_2)}{x_2}=\frac{1}{2}\ln x_2-1$,

欲证 $\frac{f(x_1)}{x_1}+\frac{f(x_2)}{x_2}=\frac{\ln x_1+\ln x_2}{2}-2 > -1$,

即证 $\ln x_1+\ln x_2 > 2$.

$\because \ln x_1=kx_1, \ln x_2=kx_2$,

$\therefore \begin{cases} \ln x_2+\ln x_1=k(x_2+x_1), \\ \ln x_2-\ln x_1=k(x_2-x_1), \end{cases}$

$\therefore \frac{\ln x_2+\ln x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}$,

$\therefore \ln x_2+\ln x_1=\frac{x_2+x_1}{x_2-x_1}(\ln x_2-\ln x_1)=\frac{\frac{x_2}{x_1}+1}{\frac{x_2}{x_1}-1}\ln \frac{x_2}{x_1}$, 10 分

令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$, 即证 $\frac{t+1}{t-1}\ln t > 2$, 即证 $\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}>0$.

记 $h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$, 则 $h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=$

$\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$,

$\therefore h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(t)>h(1)=0$, 命题得证. 12 分

22. 解: (1) 当 $k=2$ 时, 消去 t 得 $x+2y=2, x \geq 0, y \geq 0$, 3 分
是以 $A(2,0), B(0,1)$ 为端点的线段. 5 分

(2) 当 $k=1$ 时, 曲线 C_1 的普通方程为椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$;

由 $\rho \cos \theta=x, \rho \sin \theta=y$ 得曲线 C_2 的普通方程为直线 $2x-3y-12=0$.

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+y^2=1, \\ 2x-3y-12=0, \end{cases}$ 得 $25y^2+72y+128=0$,

$\Delta=72^2-100 \times 128=5184-12800 < 0$,

可知直线与椭圆相离, 则 PQ 的最小值为 P 到直线的距离的最小值.

则 $d=\frac{|4 \cos t-3 \sin t-12|}{\sqrt{13}}=\frac{|5 \sin(t-\varphi)-12|}{\sqrt{13}}=$

$\frac{12-5 \sin(t-\varphi)}{\sqrt{13}}\left(\tan \varphi=\frac{4}{3}\right)$, 当 $\sin(t-\varphi)=1$ 时, 有最

小值 $\frac{7 \sqrt{13}}{13}$. 10 分

23. 解: (1) 当 $a=2$ 时, $f(x)=|2x-1|$, 则 $f(x)>2-|x+1|$ 等价于 $|2x-1|+|x+1|>2$. 1 分

当 $x \leq -1$ 时, 则有 $1-2x-1-x=-3x>2$, 解得 $x < -\frac{2}{3}$, 此时 $x \leq -1$;

当 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 时, 则有 $1-2x+x+1=2-x>2$, 解得 $x < 0$, 此时 $-1 < x < 0$;

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 则有 $2x-1+x+1=3x>2$, 解得 $x > \frac{2}{3}$,

此时 $x > \frac{2}{3}$.

综上所述, 当 $a=2$ 时, 不等式 $f(x)>2-|x+1|$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$. 5 分

(2) 当 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $f(x)+|x-1|>x$ 成立等价于当 $x \in (1, 2)$ 时, $|ax-1|>1$ 成立. 6 分

若 $a < 0$, 则当 $x \in (1, 2)$ 时, $|ax-1|=-ax+1>1$ 恒成立;

若 $a=0$, 则当 $x \in (1, 2)$ 时, $|ax-1|=1$, 不合乎题意;

若 $a > 0$, 由 $|ax-1|>1$ 可得 $ax-1 < -1$ 或 $ax-1 > 1$, 解得 $x < 0$ 或 $x > \frac{2}{a}$, 由题意可得 $(1, 2) \subseteq$

$(\frac{2}{a}, +\infty)$, 则 $0 < \frac{2}{a} \leq 1$, 解得 $a \geq 2$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办公理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线