青岛市2023年高三年级第一次适应性检测

数学试题

2023.03

本试卷共 6 页，22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

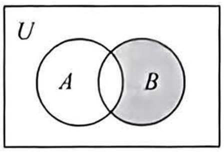
1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知全集 $U=\mathrm{R}$，$A=\{x\mid 3<x<7\}$，$B=\{x\mid |x-2|<4\}$，则下图中阴影部分表示的集合为



A．$\{x\mid -2<x\le 3\}$　B．$\{x\mid -2<x<3\}$

C．$\{-1,0,1,2\}$　D．$\{-1,0,1,2,3\}$

2．已知复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=2$，则复数 z 的虚部为

A．1　B．i　C．-1　D．$-\mathrm{i}$

3．在平面直角坐标系中，若角 α 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴的非负半轴，终边经过点 $(\sin\frac{2\pi}{3},\cos\frac{2\pi}{3})$，则 $\sin\alpha=$

A．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　B．$-\frac{1}{2}$　C．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　D．$\frac{1}{2}$

4. 龙洗，是我国著名的文物之一，因盆内有龙纹故称龙洗，为古代皇宫盥洗用具，其盆体可以近似看作一个圆台．现有一龙洗盆高 $15\ \text{cm}$，盆口直径 $40\ \text{cm}$，盆底直径 $20\ \text{cm}$．现往盆内倒入水，当水深 $6\ \text{cm}$ 时，盆内水的体积近似为

A. $1824\ \text{cm}^3$　　B. $2739\ \text{cm}^3$

C. $3618\ \text{cm}^3$　　D. $4512\ \text{cm}^3$

5. 定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足：当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=3^x-1$，且对任意实数 x，均有 $f(x)+f(x+1)=1$，则 $f(\log_3 4)=$

A. 3　　B. 2　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

6. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 $y=\sqrt{3}x$ 与 C 的左、右两支分别交于 A，B 两点，若四边形 AF_1BF_2 为矩形，则 C 的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B. 3　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\sqrt{5}+1$

7. 某次考试共有 4 道单选题，某学生对其中 3 道题有思路，1 道题完全没有思路．有思路的题目每道做对的概率为 0.8，没有思路的题目，只好任意猜一个答案，猜对的概率为 0.25．若从这 4 道题中任选 2 道，则这个学生 2 道题全做对的概率为

A. 0.34　　B. 0.37　　C. 0.42　　D 0.43

8. 已知函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{2}\sin x$，若 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{12})$，$a=f((\cos\theta)^{\sin\theta})$，$b=f((\sin\theta)^{\sin\theta})$，$c=-f(-\dfrac{1}{2})$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 在$(2x-\frac{1}{x})^8$的展开式中，下列说法正确的是

A. 常数项是1120

B. 第四项和第六项的系数相等

C. 各项的二项式系数之和为256

D. 各项的系数之和为256

10. 下列说法正确的是

A 若直线a不平行于平面α，$a\not\subset\alpha$，则α内不存在与a平行的直线

B 若一个平面α内两条不平行的直线都平行于另一个平面β，则$\alpha // \beta$

C. 设l，m，n为直线，m，n在平面α内，则“$l\perp\alpha$”是“$l\perp m$且$l\perp n$”的充要条件

D. 若平面$\alpha\perp$平面α_1，平面$\beta\perp$平面β_1，则平面α与平面β所成的二面角和平面α_1与平面β_1所成的二面角相等或互补

11. 1979年，李政道博士给中国科技大学少年班出过一道智趣题：“5只猴子分一堆桃子，怎么也不能分成5等份，只好先去睡觉，准备第二天再分．夜里1只猴子偷偷爬起来，先吃掉1个桃子，然后将其分成5等份，藏起自己的一份就去睡觉了；第2只猴子又爬起来，吃掉1个桃子后，也将桃子分成5等份，藏起自己的一份睡觉去了；以后的3只猴子都先后照此办理．问最初至少有多少个桃子？最后至少剩下多少个桃子？”．下列说法正确的是

A. 若第n只猴子分得b_n个桃子（不含吃的），则$5b_n=4b_{n-1}-1\ (n=2,3,4,5)$

B. 若第n只猴子连吃带分共得到a_n个桃子，则$\{a_n\}\ (n=1,2,3,4,5)$为等比数列

C. 若最初有3121个桃子，则第5只猴子分得256个桃子（不含吃的）

D. 若最初有k个桃子，则$k+4$必为5^5的倍数

12. 已知A，B是平面直角坐标系xOy中的两点，若$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB}(\lambda\in\mathrm{R})$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=r^2(r>0)$，则称$B$是$A$关于圆$x^2+y^2=r^2$的对称点．下面说法正确的是

A. 点$(1,1)$关于圆$x^2+y^2=4$的对称点是$(-2,-2)$

B. 圆$x^2+y^2=4$上的任意一点A关于圆$x^2+y^2=4$的对称点就是A自身

C. 圆$x^2+(y-b)^2=b^2(b>0)$上不同于原点O的点M关于圆$x^2+y^2=1$的对称点N的轨迹方程是$y=\frac{1}{2b}$

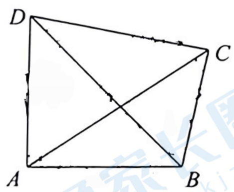
D. 若定点E不在圆$C:x^2+y^2=4$上，其关于圆C的对称点为D，A为圆C上任意一点，则$\frac{|AD|}{|AE|}$为定值

三、填空题：本题共 4 个小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $O(0,0)$，$A(1,2)$，$B(3,-1)$，若向量 $\overline{m}\parallel\overline{OA}$，且 $\overline{m}$ 与 $\overline{OB}$ 的夹角为钝角，写出一个满足条件的 $\overline{m}$ 的坐标为________.

14. 已知 O 为坐标原点，在抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$ 上存在两点 E，F，使得 $\triangle OEF$ 是边长为 4 的正三角形，则 $p=$________.

15. 湿地公园是国家湿地保护体系的重要组成部分，某市计划在如图所示的四边形 $ABCD$ 区域建一处湿地公园. 已知 $\angle DAB=90^\circ$，$\angle DBA=45^\circ$，$\angle BAC=30^\circ$，$\angle DBC=60^\circ$，$AB=2\sqrt{2}$ 千米，则 $CD=$________千米.



16. 设函数 $f(x)$ 是定义在整数集 Z 上的函数，且满足 $f(0)=1$，$f(1)=0$，对任意的 x，$y\in Z$ 都有 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$，则 $f(3)=$________；

$$\frac{f(1^2+2^2+\cdots+2023^2)}{f(1^2)+f(2^2)+\cdots+f(2023^2)}=\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

（本小题第一空 2 分，第二空 3 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega x+\sin 2\omega x\ (\omega>0)$，$x_1$，$x_2$ 是 $f(x)$ 的两个相邻极值点，且满足 $|x_1-x_2|=\pi$.

（1）求函数 $f(x)$ 图象的对称轴方程；

（2）若 $f(\alpha)=\dfrac{1}{3}$，求 $\sin 2\alpha$.

18. （12 分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公差 $d\neq 0$，S_2，S_4，S_5+4 成等差数列，a_2，a_4，a_8 成等比数列.

（1）求 S_n；

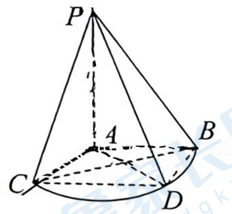
（2）记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$2b_n-T_n=\dfrac{n+2}{S_n}$，证明数列 $\{b_n-\dfrac{1}{S_n}\}$ 为等比数列，并求 $\{b_n\}$ 的通项公式.

19. （12分）

如图，在Rt△PAB中，$PA\perp AB$，且$PA=4$，$AB=2$，将△PAB绕直角边PA旋转$\frac{2\pi}{3}$到△PAC处，得到圆锥的一部分，点D是底面圆弧BC（不含端点）上的一个动点.

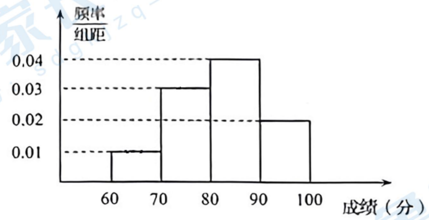
（1）是否存在点D，使得$BC\perp PD$？若存在，求出$\angle CAD$的大小；若不存在，请说明理由；

（2）当四棱锥$P-ABDC$体积最大时，求平面PCD与平面PBD夹角的余弦值.



20. （12分）

今天，中国航天仍然迈着大步向浩瀚宇宙不断探索，取得了举世瞩目的非凡成就．某学校为了解学生对航天知识的知晓情况，在全校学生中开展了航天知识测试（满分100分），随机抽取了100名学生的测试成绩，按照$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$分组，得到如下所示的样本频率分布直方图：



（1）根据频率分布直方图，估计该校学生测试成绩的中位数；

（2）用样本的频率估计概率，从该校所有学生中随机抽取10名学生的成绩，用$P(X=k)$表示这10名学生中恰有k名学生的成绩在$[90,100]$上的概率，求$P(X=k)$取最大值时对应的k的值；

（3）从测试成绩在$[90,100]$的同学中再次选拔进入复赛的选手，一共有6道题，从中随机挑选出4道题进行测试，至少答对3道题者才可以进入复赛．现有甲、乙两人参加选拔，在这6道题中甲能答对4道，乙能答对3道，且甲、乙两人各题是否答对相互独立．记甲、乙两人中进入复赛的人数为ξ，求ξ的分布列及期望.

21. （12分）

已知O为坐标原点，椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$A$为椭圆$C$的上顶点，$\triangle AF_1F_2$为等腰直角三角形，其面积为1.

（1）求椭圆C的标准方程；

（2）直线l交椭圆C于P，Q两点，点W在过原点且与l平行的直线上，记直线WP，WQ的斜率分别为k_1，k_2，$\triangle WPQ$的面积为S．从下面三个条件①②③中选择两个条件，证明另一个条件成立．

①$S=\frac{\sqrt{2}}{2}$；②$k_1k_2=-\frac{1}{2}$；③W为原点O．

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分．

22. （12分）

已知函数$f(x)=\ln x$，圆$C:x^2+(y-b)^2=2$．

（1）若$b=1$，写出曲线$y=f(x)$与圆C的一条公切线的方程（无需证明）；

（2）若曲线$y=f(x)$与圆C恰有三条公切线．

（i）求b的取值范围；

（ii）证明：曲线$D:\frac{y^2}{2}-x^2=1$上存在点$T(m,n)(m>0,n>0)$，对任意$x>0$，$f(mx)=f(x)+n-1-b$．

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索