2023届高三质量检测（一）

数学答案

一、单选题：

1-4　$BCAB$　5-8$ADCC$

二、多选题：

9.　BC　　10. ACD　11. BC　　12 AB

三、填空题：

13.　e^3-27　　　　14.　-540

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$;　$\frac{4}{3}$　　　　16.　7

四、解答题

17.解：（I）$\because \frac{a+b}{c-b}=\frac{\sin C+\sin B}{\sin A}$　由正弦定理得

$\frac{a+b}{c-b}=\frac{b+c}{a}$　……………………………2 分

化简得$a^2+b^2-c^2=-ab$

$\therefore \cos C=-\frac{1}{2}$　……………………………4 分

$\because C\in(0,\pi)$　　$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$　　……………………………5 分

（II）$\because\left(\sqrt{3}+1\right)a+2b=\sqrt{6}c$

由正弦定理得$\left(\sqrt{3}+1\right)\sin A+2\sin B=\sqrt{6}\sin C$

$\left(\sqrt{3}+1\right)\sin A+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$　……………………………7 分

$\because 0<A<\frac{\pi}{3}\ \therefore \frac{\pi}{4}<A+\frac{\pi}{4}<\frac{7\pi}{12}$

$\therefore A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}$ 即 $A=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$，..............................9 分

$\therefore \sin A=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ....10 分

18 解析：（I） $\overline{x}=3,\overline{y}=0.5$,...2 分

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y})=-2.2$, $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=10$,

$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})\cdot(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=-0.22$,...4 分

$\therefore \hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=1.16$,

$\therefore \hat{y}=-0.22x+1.16$ ....6 分

（II） 把 $x=\frac{1}{2}\lg u+7$ 代入 $\hat{y}=-0.22x+1.16$ 得：

$\hat{y}=-0.11\lg u-0.38$ ....8 分

令 $\hat{y}=-0.11\lg u-0.38\le 0.4$ ， ....10 分

解得 $u\ge 10^{-\frac{78}{11}}$

A 浓度至少要达到 $10^{-\frac{78}{11}}$ mol/L. ....12 分

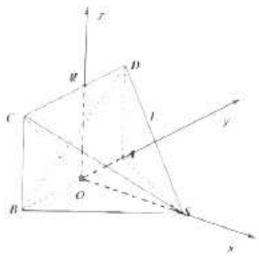
19. （I） 证明：

$\because SA=SB=AB$, O 为 AB 的中点，$\therefore SO\perp AB$.

$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 SAB , $SO\subset$ 平面 SAB ,

平面 $ABCD\cap$ 平面 $SAB=AB$

$\therefore SO\perp$ 平面 $ABCD$, 则 $SO\perp BD$.



....2 分

$\because \frac{CB}{BO}=\frac{BA}{AD}=\sqrt{2}$ ， $\angle CBO=\angle BAD=90^\circ$ ，

$\therefore \Delta CBO\sim\Delta BAD$ ， 故 $\angle BCO=\angle ABD$ ，

$\therefore \angle ABD+\angle COB=\angle BCO+\angle COB=90^\circ$ ，

$\therefore BD\perp CO$；……………………………………………4 分

$CO\cap SO=O,\therefore BD\perp$ 平面SOC

……………………………………………5 分

（II）如图，在底面 ABCD 中，过 O 点作 OM 垂直 AB 交棱 CD 于 M 点，以 O 为坐标原点，射线 OS，OA,OM 为 x,y,z 轴的非负半轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$.

由已知得，$O(0,0,0)$，$A(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$ $C(0,-1,\sqrt{2})$ $D(0,1,\sqrt{2})$，$S(\sqrt{3},0,0)$

假设存在点E，设$\dfrac{SE}{SD}=\lambda$，则$E(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,\ \lambda,\sqrt{2}\lambda)$

……………………………………………6 分

$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,\lambda-1,\sqrt{2}\lambda),\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0,-2,0),\overrightarrow{DS}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{2})$

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面SCD的法向量.

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DS}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2y=0,\\ \sqrt{3}x-y-\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 令$x=\sqrt{2}$，可得$\boldsymbol{n}=(\sqrt{2},0,\sqrt{3})$.

……………………………………………8 分

设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面ABE的法向量.

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2y=0,\\ (\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)x+(\lambda-1)y+\sqrt{2}\lambda z=0,\end{cases}$

令$x=\sqrt{2}\lambda$，可得$\boldsymbol{m}=(\sqrt{2}\lambda,0,\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3})$

……………………………………………10 分

因此有$|\cos\langle\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|2\lambda+3\lambda-3|}{\sqrt{5}\sqrt{5\lambda^2-6\lambda+3}}=\dfrac{1}{5}$，

解得$\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=\dfrac{7}{10}$，$\therefore\dfrac{SE}{SD}=\dfrac{1}{2}$或$\dfrac{SE}{SD}=\dfrac{7}{10}$

……………………………………………12 分

20. 解：（I） 方法一：

由 $3a_2+2a_3=S_5+6$ 得 $d=-2$，$\therefore S_n=-n^2+(a_1+1)n$，………………2 分

若数列$\{S_n\}$为单调递减，则满足 $S_{n+1}-S_n<0(n\ge1)$ 恒成立，

即 $a_1-2n<0(n\ge1)$，得 $a_1<2n(n\ge1)$ 恒成立.………………4 分

解得：$a_1<2$.………………5 分

方法二：

由 $3a_2+2a_3=S_5+6$ 得 $d=-2$，$\therefore S_n=-n^2+(a_1+1)n$，………………2 分

若数列 $\{S_n\}$ 为单调递减，则需满足 $\frac{a_1+1}{2}<\frac{3}{2}$ ………………4 分

解得：$a_1<2$．………………5 分

（II）根据题意数列 $\{b_n\}$ 为：

$1,2^0,-1,2^0,2^1,-3,2^0,2^1,2^2,-5\cdots-2n+3,2^0,2^1,\cdots2^{n-1},-2n+1\cdots$ 可将数列分组：

第一组为：1，2^0；
第二组为：-1，2^0，2^1；
第三组为：-3，2^0，2^1，2^2；
……
第 k 组为：$-2k+3$，2^0，2^1，$2^2\cdots2^{k-1}$；………………7 分

则前 k 组一共有 $2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+3)k}{2}$ 项，当 $k=12$ 时，项数为 90．

故 T_{95} 相当于是前 12 组的和再加上 $-23,1,2,2^2,2^3$ 这五项，即

$T_{95}=\left(1+(-1)+\cdots(-21)\right)+\left(2^0+(2^0+2^1)+\cdots(2^0+2^1+\cdots2^{11})\right)+\left(-23+1+2+2^2+2^3\right)$………………9 分

$2^0+(2^0+2^1)+\cdots(2^0+2^1+\cdots2^{11})$ 可看成是数列 $\{c_n\}$ $(c_n=2^n-1)$ 的前 12 项和，………………10 分

$T_{95}=\frac{(1-21)\times12}{2}+\frac{2\times(1-2^{12})}{1-2}-12-23+1+2+4+8=2^{13}-142=8050$．………………12 分

21.解：（I）由题意可知：点 $P(4,3)$ 在双曲线上，所以 $\frac{16}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$，………………1 分

过 P 做 x 轴的平行线 $y=3$，与 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 相交于 M,N 两点，那么 M,N 两点可求：

$M(\frac{3a}{b},3)$，$N(-\frac{3a}{b},3)$，

所以 $\left|4-\frac{3a}{b}\right|\cdot\left|4+\frac{3a}{b}\right|=\left|16-\frac{9a^2}{b^2}\right|=a^2\left|\frac{16}{a^2}-\frac{9}{b^2}\right|=a^2=4$，所以 $a=2$，

………………………3 分

代入 $\frac{16}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$，可知 $b=\sqrt{3}$，所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$．

………………………4 分

（II）（选①）由题意可知，直线 l 与双曲线 C 交于不同的两点 A，B，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立方程：

$$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$$，可得：$(3-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-12=0$

所以$3-4k^2\neq 0$，$\Delta=(-8km)^2-4(3-4k^2)(-4m^2-12)>0$即$m^2+3-4k^2>0$，

由韦达定理可知：$x_1+x_2=\dfrac{8km}{3-4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-4m^2-12}{3-4k^2}$，…………………6 分

由条件$k_1+k_2=1$，即为：$\dfrac{y_1-3}{x_1-4}+\dfrac{y_2-3}{x_2-4}=1$，

整理可得：$(x_2-4)(kx_1+m-3)+(x_1-4)(kx_2+m-3)=(x_1-4)(x_2-4)$

即：$2kx_1x_2+(m-3-4k)(x_1+x_2)-8(m-3)=x_1x_2-4(x_1+x_2)+16$………………8 分

代入韦达定理得：$m^2+2km-8k^2-6k-6m+9=0$

分解因式可得：$(m-2k-3)(m+4k-3)=0$

所以$m=2k+3$或$m=-4k+3$………………10 分

若$m=2k+3$，直线$y=kx+m=kx+2k+3=k(x+2)+3$，则直线l过定点$(-2,3)$；

若$m=-4k+3$，则$y=kx+m=kx-4k+3=k(x-4)+3$，则直线l过点 P，不合题意舍去.

综上所述，直线l过定点$(-2,3)$.………………12 分

（选②）由题意可知，直线l与双曲线 C 交于不同的两点 A，B，设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立方程：

$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，可得：$(3-4k^2)x^2-8kmx-4m^2-12=0$

所以$3-4k^2\neq 0$，$\Delta=(-8km)^2-4(3-4k^2)(-4m^2-12)>0$即$m^2+3-4k^2>0$

由韦达定理可知：$x_1+x_2=\dfrac{8km}{3-4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{-4m^2-12}{3-4k^2}$…………………6 分

由条件$k_1k_2=1$，即为：$\dfrac{y_1-3}{x_1-4}\cdot\dfrac{y_2-3}{x_2-4}=1$，

整理可得：$\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)-3\left[(kx_1+m)+(kx_2+m)\right]+9}{(x_1-4)(x_1-4)}=1$

即：$\dfrac{k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2-3k(x_1+x_2)-6m+9}{x_1x_2-4(x_1+x_2)+16}=1$…………………8 分

展开代入韦达定理得：$7m^2+32km+16k^2-18m-9=0$

分解因式可得：$(7m+4k+3)(m+4k-3)=0$

所以 $m=-\dfrac{4k+3}{7}$ 或 $m=-4k+3$ ·····················10 分

若 $m=-\dfrac{4k+3}{7}$，直线 $y=kx+m=kx-\dfrac{4k+3}{7}=k(x-\dfrac{4}{7})-\dfrac{3}{7}$，则直线 l 过定点 $(\dfrac{4}{7},-\dfrac{3}{7})$；

若 $m=-4k+3$，则 $y=kx+m=kx-4k+3=k(x-4)+3$，则直线 l 过点 P，不合题意舍去.

综上所述，直线 l 过定点 $(\dfrac{4}{7},-\dfrac{3}{7})$.·····················12 分

22 解：（I）证明：令 $f(x)=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x$，

当 $\alpha=1$ 时，可知 $f(x)=0$，原不等式成立；·····················1 分

当 $\alpha>1$ 时，$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha=\alpha[(1+x)^{\alpha-1}-1]$，

可知当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增. ·····················3 分

所以 $f(x)\ge f(0)=0$，所以原不等式得证. ·····················4 分

（II）要证对任意 $n\in N^*$，$1^n+2^n+3^n+\ldots+n^n<(n+1)^n$ 恒成立，只要证：

$$\left(\frac{1}{n+1}\right)^n+\left(\frac{2}{n+1}\right)^n+\left(\frac{3}{n+1}\right)^n+\ldots\ldots+\left(\frac{n}{n+1}\right)^n<1$$，即证：

$$\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n+\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)^n+\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right)^n+\ldots\ldots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n<1$$ ·····················6 分

由（I）可知对于任意正整数 $i\in\{1,2,3\ldots\ldots n\}$，$1-\dfrac{i}{n+1}\le\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^i$，所以

$$\left(1-\frac{i}{n+1}\right)^n\le\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{in}=\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n\right]^i$$，那么

$$\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^n+\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)^n+\left(1-\frac{n-2}{n+1}\right)^n+\ldots\ldots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n<$$

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n\cdot n}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n(n-1)}+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n(n-2)}+\ldots\ldots+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n\cdot 1}$$

$$=\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right]^{n}+\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right]^{n-1}+\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right]^{n-2}+\ldots\ldots+\left[\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right]^{1} \quad (*)$$

………………………8 分

而 $(1-\frac{1}{n+1})^n \le \frac{1}{2}$ 成立，

证明：要证 $(1-\frac{1}{n+1})^n \le \frac{1}{2}$，只要证 $\frac{1}{\frac{1}{n}+1} \le (\frac{1}{2})^{\frac{1}{n}}$，令 $\frac{1}{n}=x\in(0,1]$ ，即证明：$2^x \le 1+x$ 成立，令 $g(x)=2^x-1-x$，求导可得：$g'(x)=2^x\ln 2-1$，

当 $0<x<\log_2(\frac{1}{\ln 2})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $\log_2(\frac{1}{\ln 2})<x\le 1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，又 $g(0)=0$，$g(1)=0$，所以当 $x\in(0,1]$ 时，$g(x)\le 0$.

所以 $(1-\frac{1}{n+1})^n \le \frac{1}{2}$ ………………………10 分

所以（*）$\le (\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{2})^{n-1}+(\frac{1}{2})^{n-2}+\cdots+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^1=1-(\frac{1}{2})^n<1$

所以命题得证.

………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。