高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $M=\{x|y=\sqrt{2+x}\}$，$N=\{x|-5<x<3\}$，则 $M\cup N=$

A. $\{x|-2\leqslant x<3\}$　　B. $\{x|x>-5\}$

C. $\{x|x<3\}$　　D. $\{x|-5<x\leqslant -2\}$

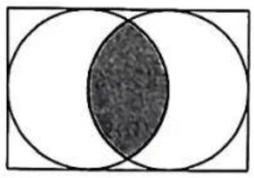
2. 复数 $z=\dfrac{1-2i}{i^3}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知函数 $f(x)=ax^2-\ln x$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $y=-3x$ 平行，则该切线的方程为

A. $2x+y+1=0$　　B. $3x+y-3=0$　　C. $3x+y-2=0$　　D. $2x+y-1=0$

4. 我国传统剪纸艺术历史悠久，源远流长，最早可追溯到西汉时期．下图是某一窗花的造型，在长为3，宽为2的矩形中有大小相同的两个圆，两圆均与矩形的其中三边相切，在此矩形内任取一点，则该点取自两圆公共(图中阴影)部分的概率为



A. $\dfrac{\pi}{18}-\dfrac{\sqrt{3}}{24}$　　B. $\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{16}$

C. $\dfrac{\pi}{9}-\dfrac{\sqrt{3}}{12}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

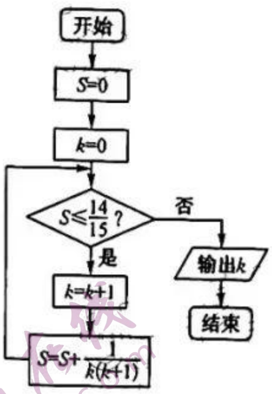
5. 古代名著《九章算术》中记载了求"方亭"体积的问题，方亭是指正四棱台．今有一个方亭型的水库，该水库的下底面的边长为20 km，上底面的边长为40 km，若水库的最大蓄水量为 $\dfrac{28}{3}\times 10^9\ m^3$，则水库深度(棱台的高)为

A. 10 m　　B. 20 m　　C. 30 m　　D. 40 m

6. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，过焦点 F 的直线 $4x+3y-4=0$ 与 C 在第四象限交于 M 点，则 $|MF|=$

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 执行如图所示的程序框图，则输出的 k 的值为



A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

8. 某部门统计了某地区今年前 7 个月在线外卖的规模如下表：

月份代号 x	1	2	3	4	5	6	7
在线外卖规模 y(百万元)	11	13	18	★	28	★	35

其中 4、6 两个月的在线外卖规模数据模糊，但这 7 个月的平均值为 23. 若利用回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 来拟合预测，且 7 月相应于点(7,35)的残差为 −0.6，则 $\hat{a}-\hat{b}=$

A. 1.0　　B. 2.0　　C. 3.0　　D. 4.0

9. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 4 项和为 30，且 $a_5=a_4-\frac{1}{4}a_3$，则 $a_9=$

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{16}$　　D. $\frac{1}{32}$

10. 记函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)+b\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期为 T，若 $f\left(\frac{T}{4}\right)=-2$，且函数 $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},-3\right)$对称，则当 ω 取得最小值时，$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=$

A. 2　　B. 1　　C. −1　　D. −2

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点为 F，过 F 的直线与 C 的两条渐近线分别交于 A，B 两点，与 C 交于 P，Q 两点，若 P，F，Q 四等分线段 AB，则 C 的离心率为

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

12. 已知球 O 的半径为 2，四棱锥的顶点均在球 O 的球面上，当该四棱锥的体积最大时，其高为

A. $\frac{5}{3}$　　B. 2　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{8}{3}$

20.(12分)

已知函数 $f(x)=xe^x-x^3+3x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2)当 $x\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$f(x)\geqslant ax^2+6x$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

21.(12分)

已知椭圆 E 的中心为坐标原点 O,对称轴分别为 x 轴、y 轴,且过 $A(-1,0)$,$B\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-1\right)$两点.

(1)求 E 的方程;

(2)设 F 为椭圆 E 的一个焦点,M,N 为椭圆 E 上的两动点,且满足$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AF}=0$,当 M,O,N 三点不共线时,求$\triangle MON$ 的面积的最大值.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\left(3^t+\frac{1}{3^t}\right),\\ y=3^t-\frac{1}{3^t},\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,已知直线 l 的极坐标方程为 $m\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-1=0$.

(1)求曲线 C 的普通方程;

(2)若 l 与 C 有两个不同公共点,求 m 的取值范围.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x+1|$.

(1)求不等式 $f(x)\leqslant 3$ 的解集;

(2)设函数 $g(x)=|x-a|+|x-2|$,若对任意 $x_1\in\mathbf{R}$,都存在 $x_2\in\mathbf{R}$,使得 $f(x_1)=g(x_2)$成立,求实数 a 的取值范围.

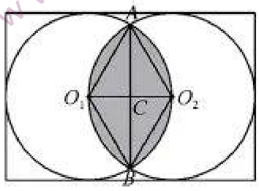
高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　$M=\{x|y=\sqrt{2+x}\}=\{x|x\geqslant -2\}$，$N=\{x|-5<x<3\}$，所以 $M\cup N=\{x|x>-5\}$. 故选 B.

2. A　$z=\frac{1-2i}{i^3}=\frac{1-2i}{-i}=2+i$，所以复数 $z=\frac{1-2i}{i^3}$在复平面内对应的点为$(2,1)$. 故选 A.

3. C　$f'(x)=2ax-\frac{1}{x}$，则 $f'(1)=2a-1=-3$，解得 $a=-1$，所以 $f(1)=-1$，则该切线的方程为 $y+1=-3(x-1)$，即 $3x+y-2=0$. 故选 C. 来源：高三答案公众号

4. C　如图所示，设两圆的圆心分别为 O_1，O_2，两圆相交于 A，B 两点，则两圆互过圆心，连接 O_1A，O_1B，O_1O_2，O_2A，O_2B，AB，AB 与 O_1O_2 交于 C，则 $O_1O_2\perp AB$，$O_1A=1$，$O_1C=\frac{1}{2}$，所以 $\angle AO_1C=60°$，则$\angle AO_2B=\angle AO_1B=120°$，所以弓形 AO_2B 的面积为 $S=\frac{1}{3}\times\pi\times 1^2-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$，在矩形内任取一点，该点取自两圆公共部分的概率为 $p=\frac{2\times\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{3\times 2}=\frac{\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{12}$. 故选 C.



5. A　设水库深度为 h km，由题意，$\frac{1}{3}(20^2+40^2+\sqrt{20^2\times 40^2})\cdot h=\frac{28}{3}$，解得 $h=0.01$ km，即 $h=10$ m. 故选 A.

6. C　由题意可知，F 的坐标为$(1,0)$，则$\frac{p}{2}=1$，所以 $p=2$，则抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，设 $M(x_0,-2\sqrt{x_0})$，由 $k_{MF}=\frac{-2\sqrt{x_0}}{x_0-1}=-\frac{4}{3}$，解得 $x_0=4$，所以$|MF|=x_0+\frac{p}{2}=5$. 故选 C.

7. B　由题知 $S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$. $k=15$ 时，$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right)=\frac{15}{16}>\frac{14}{15}$，开始出现 $S>\frac{14}{15}$，故输出的 k 的值为 15. 故选 B.

8. B　$\bar{x}=\frac{1}{7}(1+2+3+4+5+6+7)=4$，$\bar{y}=23$，所以 $4\hat{b}+\hat{a}=23$. 因为相应于点$(7,35)$的残差为-0.6，则点$(7,35.6)$在回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 上，即 $7\hat{b}+\hat{a}=35.6$，解得 $\hat{a}=6.2$，$\hat{b}=4.2$，则 $\hat{a}-\hat{b}=2.0$. 故选 B.

9. C　设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，前 n 项和为 S_n，由 $a_5=a_4-\frac{1}{4}a_3$，得 $q^2=q-\frac{1}{4}$，解得 $q=\frac{1}{2}$，由 $S_4=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1-\frac{1}{2}}=30$，解得 $a_1=16$，所以 $a_9=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{1}{16}$. 故选 C.

10. D　由题意可知，$T=\frac{2\pi}{\omega}$，$b=-3$，由 $f\left(\frac{T}{4}\right)=-2$，得 $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)-3=-2$，所以 $\sin\varphi=-\frac{1}{2}$，因为$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，又函数 $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},-3\right)$对称，所以$\frac{\omega\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$\omega=6k+4$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $\omega>0$，所以当 $k=0$ 时，ω 取得最小值 4，则 $f(x)=2\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)-3$，故 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-3=-2$. 故选 D.

11. A　不妨设交点的顺序自上而下为 A,P,Q,B，则$|AP|=|PF|=|FQ|=|QB|$，由对称性可知，$AB\perp x$ 轴，则 AB 的方程为 $x=-c$，代入 $y=-\frac{b}{a}x$，求得 $A\left(-c,\frac{bc}{a}\right)$，代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，求得 $P(-c,\frac{b^2}{a})$，则$|AP|=\frac{bc-b^2}{a}$，$|PF|=\frac{b^2}{a}$，所以$\frac{bc-b^2}{a}=\frac{b^2}{a}$，所以 $c=2b$，则 $a=\sqrt{3}b$，所以 C 的离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{2b}{\sqrt{3}b}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

12. D　四棱锥的底面内接于圆，当底面为正方形时，底面面积最大(论证如下：设底面四边形 $ABCD$ 的外接圆半径为 r，AC 与 BD 的夹角为 α，则四边形 $ABCD$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD\leqslant\frac{1}{2}\times 2r\times 2r=2r^2$，当且仅当四边形 $ABCD$ 是正方形时，四边形 $ABCD$ 的面积取到最大值 $2r^2$). 要使四棱锥的体积最大，则从顶点作底面的垂线过球心 O，该四棱锥为正四棱锥，设底面的边长为 a，四棱锥的高为 h，底面外接圆的半径为 $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，由题意可知，$r^2+(h-2)^2=4$，即$\frac{1}{2}a^2+(h-2)^2=4$，所以 $a^2=2(4h-h^2)$，则 $0<h<4$，四棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}a^2\times h=\frac{2}{3}(4h^2-$

h^3)，令 $f(x)=4x^2-x^3(0<x<4)$，则 $f'(x)=8x-3x^2$，由 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{8}{3}$，由 $x\in\left(0,\frac{8}{3}\right)$，得 $f'(x)>0$，由 $x\in\left(\frac{8}{3},4\right)$，得 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$在$\left(0,\frac{8}{3}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{8}{3},4\right)$上单调递减，则当 $x=\frac{8}{3}$时，$f(x)$取得极大值，也就是最大值，此时 $h=\frac{8}{3}$. 故选 D.来源：高三答案公众号

13. $\frac{5}{4}$　$\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}=(2,6)$，由$(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})/\!/\boldsymbol{m}$，得 $6(-1+a)-2(2-a)=0$，解得 $a=\frac{5}{4}$.

14. $2n^2+5n$　设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，由 $a_1+a_2-a_3=3$，$a_3+a_4-a_5=11$ 两式相减得 $2d=8$，解得 $d=4$，由 $a_1+(a_1+d)-(a_1+2d)=3$，得 $a_1=7$，故 $S_n=7n+\frac{n(n-1)}{2}\times4=2n^2+5n$.

15. $y=2\sqrt{2}x-3-2\sqrt{2}$或 $y=-2\sqrt{2}x-3+2\sqrt{2}$或 $y=1$(答案不唯一，3 个中任填一个即可)　易知圆$(x-1)^2+y^2=1$ 和$(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 外切，显然 $y=1$ 与这两圆都相切. 设直线 $y=kx+b$ 与圆$(x-1)^2+y^2=1$ 和$(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 都相切，则$\frac{|k+b|}{\sqrt{1+k^2}}=1$ 且$\frac{|k+b-3|}{\sqrt{1+k^2}}=2$，所以 $2|k+b|=|k+b-3|$，令 $k+b=t$，则 $t^2+2t-3=0$，解得 $t=1$ 或 $t=-3$，当 $t=1$ 时，解得 $k=0$，此时 $b=1$，直线方程即为 $y=1$；当 $t=-3$ 时，$\sqrt{1+k^2}=3$，解得 $k=\pm2\sqrt{2}$，当 $k=2\sqrt{2}$时，$b=-3-2\sqrt{2}$；当 $k=-2\sqrt{2}$时，$b=-3+2\sqrt{2}$，所以直线方程为 $y=2\sqrt{2}x-3-2\sqrt{2}$或 $y=-2\sqrt{2}x-3+2\sqrt{2}$.

16. 8　ln 2　易知 $y=x^3$ 是奇函数，因为函数 $f(x)=x^3\left(\ln\left|\frac{a}{2-x}-2\right|-b\right)$是偶函数，所以 $g(x)=\ln\left|\frac{a}{2-x}-2\right|-b$ 是奇函数，又知 $x\neq2$，根据奇函数的定义域关于原点对称，则 $x\neq-2$，当 $x=-2$ 时，$\frac{a}{4}-2=0$，所以 $a=8$，所以 $g(x)=\ln\left|\frac{8}{2-x}-2\right|-b=\ln\left|\frac{2x+4}{2-x}\right|-b$，则 $g(0)=\ln\left|\frac{0+4}{2-0}\right|-b=0$，解得 $b=\ln 2$. 经检验，$a=8$，$b=\ln 2$ 时符合题意.

17. (1)解：由 $A=B$ 及已知，得 $\sin(A-C)\frac{\sin A}{\cos A}=\sin A\sin C$，

又 $\sin A\neq0$，所以 $\sin(A-C)=\cos A\sin C$，即 $\sin A\cos C-\cos A\sin C=\cos A\sin C$，

所以 $\sin A\cos C=2\cos A\sin C$. ………………………………………………………… 2 分

又 $C=\pi-2A$，则 $\sin A\cos(\pi-2A)=2\cos A\sin(\pi-2A)$，

所以 $-\sin A\cos 2A=2\cos A\sin 2A$，则 $-\sin A(2\cos^2A-1)=4\cos^2A\sin A$，

所以 $-2\cos^2A+1=4\cos^2A$，解得 $\cos^2A=\frac{1}{6}$，

故 $\sin^2A=1-\cos^2A=\frac{5}{6}$. ………………………………………………………… 6 分

(2)证明：由题意知，$(\sin B\cos C-\cos B\sin C)\frac{\sin A}{\cos A}=\sin B\sin C$，

所以 $\sin A\sin B\cos C=\sin C(\sin B\cos A+\cos B\sin A)$，

则 $\sin A\sin B\cos C=\sin C\sin(A+B)=\sin^2C$.

由正弦定理，得 $ab\cos C=c^2$， ………………………………………………………… 9 分

由余弦定理，得 $ab\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c^2$，

整理，得 $3c^2=a^2+b^2$，$\frac{a^2+b^2}{c^2}=3$，故$\frac{a^2+b^2}{c^2}$为定值，得证. ………………………… 12 分

18. 解：(1)由频率分布表可知，$m=1-0.15-0.25-0.30-0.10=0.20$. ………………………… 2 分

这 200 份问卷得分的平均值估计为 $55\times0.15+65\times0.25+75\times0.20+85\times0.30+95\times0.10=74.5$. …………… 4 分

(2)由分层抽样的方法可知，抽取的 6 人中，成绩在[70,80)内的有 2 人，分别记为 A_1,A_2；

成绩在[80,90)内的有 3 人，分别记为 B_1,B_2,B_3；成绩在[90,100]内的有 1 人，记为 C_1， ………………………… 6 分

则从这 6 人中随机抽取 3 人的所有基本事件为$\{A_1,A_2,B_1\}$，$\{A_1,A_2,B_2\}$，$\{A_1,A_2,B_3\}$，$\{A_1,A_2,C_1\}$，$\{A_1,B_1,B_2\}$，$\{A_1,B_1,B_3\}$，$\{A_1,B_1,C_1\}$，$\{A_1,B_2,B_3\}$，$\{A_1,B_2,C_1\}$，$\{A_1,B_3,C_1\}$，$\{A_2,B_1,B_2\}$，$\{A_2,B_1,B_3\}$，$\{A_2,B_1,C_1\}$，$\{A_2,B_2,B_3\}$，$\{A_2,B_2,C_1\}$，$\{A_2,B_3,C_1\}$，$\{B_1,B_2,B_3\}$，$\{B_1,B_2,C_1\}$，$\{B_1,B_3,C_1\}$，$\{B_2,B_3,C_1\}$，共 20 个， … 8 分

记这 3 人来自不同组为事件 A，其基本事件有$\{A_1,B_1,C_1\}$，$\{A_1,B_2,C_1\}$，$\{A_1,B_3,C_1\}$，$\{A_2,B_1,C_1\}$，$\{A_2,B_2,C_1\}$，$\{A_2,B_3,C_1\}$，共 6 个， ………………………………………………………… 10 分

故这 3 人来自不同组的概率为 $P(A)=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$. ………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明：连结 BD，

因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，$BC\subset$平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$. ………………………………………… 2 分

因为 $AB\perp AD$，$AB=4$，$AD=\sqrt{2}$，所以 $BD^2=AD^2+AB^2=18$.

又 $BC=2\sqrt{3}$，$CD=\sqrt{6}$，所以 $BD^2=CD^2+BC^2$，$BC\perp CD$. ………… 4 分

又 $PD\cap CD=D$，$PD\subset$平面 PCD，$CD\subset$平面 PCD，所以 $BC\perp$平面 PCD， ………… 5 分

又 $BC\subset$平面 PBC，故平面 $PCD\perp$平面 PBC. ………… 6 分

(2)解：法一：由(1)，得 $BD=3\sqrt{2}$，来源：高三答案公众号

所以 $\sin\angle ABC=\sin(\angle ABD+\angle DBC)=\sin\angle ABD\cos\angle DBC+\cos\angle ABD\sin\angle DBC=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}+\dfrac{4}{3\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

………… 9 分

则$\triangle ABC$的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times BC\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=4\sqrt{2}$， ………… 10 分

故三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $V_{三棱锥P-ABC}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PD=\dfrac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times4=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ ………… 12 分

法二：因为 $AB\perp AD$，$BC\perp CD$，所以$\angle ABC+\angle ADC=\pi$，

所以 $\cos\angle ABC=-\cos\angle ADC$. 在$\triangle ABC$与$\triangle ADC$中，

由余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$，

因此 $4^2+(2\sqrt{3})^2-2\times4\times2\sqrt{3}\cos\angle ABC=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}\cos\angle ABC$，

解得 $\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ………… 9 分

则$\triangle ABC$的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times BC\cdot\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=4\sqrt{2}$， ………… 10 分

故三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $V_{三棱锥P-ABC}=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PD=\dfrac{1}{3}\times4\sqrt{2}\times4=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$. ………… 12 分

20. 解：(1) $f'(x)=(x+1)e^x-3x^2+3=(x+1)(e^x-3x+3)$， ………… 1 分

设 $h(x)=e^x-3x+3$，则 $h'(x)=e^x-3$，

当 $x\in(-\infty,\ln 3)$时，$h'(x)<0$，当 $x\in(\ln 3,+\infty)$时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$在$(-\infty,\ln 3)$上单调递减，在$(\ln 3,+\infty)$上单调递增， ………… 3 分

所以 $h(x)\geqslant h(\ln 3)=6-3\ln 3>0$，则 $e^x-3x+3>0$. ………… 4 分

所以当 $x\in(-\infty,-1)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

故 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,-1)$，单调递增区间为$(-1,+\infty)$. ………… 5 分

(2)当 $x\geqslant\dfrac{1}{3}$时，$f(x)\geqslant ax^2+6x$ 恒成立，等价于 $a\leqslant\dfrac{e^x}{x}-x-\dfrac{3}{x}$在$\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$上恒成立.

设 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}-x-\dfrac{3}{x}\left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$，则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}-1+\dfrac{3}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x-x^2+3}{x^2}$. ………… 6 分

设 $\varphi(x)=(x-1)e^x-x^2+3\left(x\geqslant\dfrac{1}{3}\right)$，则 $\varphi'(x)=x(e^x-2)$， ………… 7 分

当 $x\in\left(\dfrac{1}{3},\ln 2\right)$时，$\varphi'(x)<0$，当 $x\in(\ln 2,+\infty)$时，$h'(x)>0$， ………… 8 分

所以 $\varphi(x)$在$\left(\dfrac{1}{3},\ln 2\right)$上单调递减，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递增，………… 9 分

则 $\varphi(x)\geqslant\varphi(\ln 2)=2(\ln 2-1)-(\ln 2)^2+3>2(\ln 2-1)-(\ln 2)^2+2=\ln 2(2-\ln 2)>0$.

所以 $g'(x)>0$， ………… 10 分

则 $g(x)$在$\left[\dfrac{1}{3},+\infty\right)$上单调递增，故 $g(x)$的最小值为 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=3\sqrt[3]{e}-\dfrac{28}{3}$， ………… 11 分

所以 $a\leqslant3\sqrt[3]{e}-\dfrac{28}{3}$，所以实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,3\sqrt[3]{e}-\dfrac{28}{3}\right]$. ………… 12 分

21. 解：(1)设 E 的方程为 $sx^2+ty^2=1(s>0,t>0,s\neq t)$，

由题意，$\begin{cases}s=1,\\ \dfrac{s}{2}+t=1,\end{cases}$ 解得 $s=1,t=\dfrac{1}{2}$， ………… 2 分

故 E 的方程为$\dfrac{y^2}{2}+x^2=1$. ………… 3 分

(2)由椭圆的对称性，不妨设 F 为下焦点，则 $F(0,-1)$，所以$\overrightarrow{AF}=(1,-1)$，

因为$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AF}=0$，所以直线 MN 的斜率为 1，

设直线 MN 的方程为 $y=x+m(m\neq0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$， ………… 4 分

由$\begin{cases}\dfrac{y^2}{2}+x^2=1,\\ y=x+m,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $3x^2+2mx+m^2-2=0$，

则 $\Delta=4m^2-4\times3\times(m^2-2)=8(3-m^2)>0$，所以 $m^2<3$ 且 $m\neq0$. ………………………… 6 分

$x_1+x_2=-\frac{2m}{3}$，$x_1x_2=\frac{m^2-2}{3}$，

所以 $|MN|=\sqrt{1+1^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt2\times\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt2\times\sqrt{\left(-\frac{2m}{3}\right)^2-4\times\frac{m^2-2}{3}}=\frac{4\sqrt{3-m^2}}{3}$，………………………… 8 分

原点 O 到直线 MN 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt2}$，………………………… 9 分

则△MON 的面积为 $S_{\triangle MON}=\frac12\times|MN|\times d=\frac12\times\frac{4\sqrt{3-m^2}}{3}\times\frac{|m|}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{3}\sqrt{m^2(3-m^2)}\leqslant\frac{\sqrt2}{3}\times\frac{m^2+(3-m^2)}{2}=\frac{\sqrt2}{2}$，

当且仅当 $m^2=\frac32$，即 $m=\pm\frac{\sqrt6}{2}$ 时，△MON 的面积最大，………………………… 11 分

显然 $m=\pm\frac{\sqrt6}{2}$ 满足 $m^2<3$ 且 $m\neq0$.

所以△MON 的面积的最大值为 $\frac{\sqrt2}{2}$. ………………………… 12 分

22. 解：(1)因为 $x=\frac12\left(3^t+\frac{1}{3^t}\right)\geqslant1$，且 $x^2=\frac14\left(3^{2t}+\frac{1}{3^{2t}}+2\right)$，$y^2=3^{2t}+\frac{1}{3^{2t}}-2$，………………………… 2 分

所以 $4x^2-y^2=4$，则曲线 C 的普通方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1(x\geqslant1)$. ………………………… 5 分

(2)由 $m\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-1=0$，化为直角坐标方程为 $mx+y-1=0$. ………………………… 6 分

由 $\begin{cases}mx+y-1=0,\\ x^2-\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(4-m^2)x^2+2mx-5=0$，………………………… 8 分

则 $\begin{cases}4-m^2\neq0,\\ \Delta=4m^2+20(4-m^2)>0,\\ -\frac{2m}{4-m^2}>0,\\ \frac{-5}{4-m^2}>0,\end{cases}$ 解得 $2<m<\sqrt5$.

故 m 的取值范围为 $(2,\sqrt5)$. ………………………… 10 分

23. 解：(1) $f(x)=\begin{cases}-2x-\frac12, & x<-1,\\ \frac32, & -1\leqslant x\leqslant\frac12,\\ 2x+\frac12, & x>\frac12,\end{cases}$ ………………………… 2 分

当 $x<-1$ 时，由 $-2x-\frac12\leqslant3$，得 $-\frac74\leqslant x<-1$；

当 $-1\leqslant x\leqslant\frac12$ 时，$f(x)\leqslant3$ 恒成立；

当 $x>\frac12$ 时，由 $2x+\frac12\leqslant3$，得 $\frac12<x\leqslant\frac54$.

综上，$f(x)\leqslant3$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac74\leqslant x\leqslant\frac54\right\}$. ………………………… 5 分

(2)因为对任意 $x_1\in\mathbf{R}$，都存在 $x_2\in\mathbf{R}$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，

所以 $\{y|y=f(x)\}\subseteq\{y|y=g(x)\}$，………………………… 6 分

又 $f(x)=\left|x-\frac12\right|+|x+1|\geqslant\left|x-\frac12-(x+1)\right|=\frac32$，$g(x)=|x-a|+|x-2|\geqslant|a-2|$，等号都能取到，…… 8 分

所以 $\frac32\geqslant|a-2|$，解得 $\frac12\leqslant a\leqslant\frac72$，

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac12,\frac72\right]$. ………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。