

中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 9 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+2} < \frac{1}{2}, x \in \mathbf{R} \right\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 < x < 5\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{2\}$ B. $\{2,3\}$ C. $\{3,4\}$ D. $\{2,3,4\}$

2. 欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 把自然对数的底数 e 、虚数单位 i 、三角函数联系在一起，充分体现了数学的和谐美。已知实数指数幂的运算性质同样也适用于复数指数幂，则 $i^i =$

- A. $e^{-\frac{\pi}{2}}$ B. $e^{\frac{\pi}{2}}$ C. e^{π} D. $e^{-\pi}$

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{12} = S_4 + 16S_8$, 则公比 $q =$

- A. $\frac{1}{3}$ B. ± 2 C. 2 D. ± 3

4. 已知向量 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6$, 线段 BC 的中点为 M , 且 $|\overline{AM}| = 6$, 则 $|\overline{BC}| =$

- A. $2\sqrt{30}$ B. $3\sqrt{30}$ C. $2\sqrt{26}$ D. $3\sqrt{26}$

5. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 的周期为 T , 且满足 $T > 2\pi$, 若函数 $f(x)$ 在区

$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ 不单调, 则 ω 的取值范围是

- A. $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ C. $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ D. $\left(\frac{4}{5}, 1\right)$

6. 三棱锥 $A-BCD$ 中, $AB = 3, BC = BD = 4\sqrt{2}, \angle ABC = \angle ABD = \frac{\pi}{4}, \angle DBC = \frac{\pi}{3}$, 则直线

与平面 ABC 所成角的正弦值是

- A. $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ B. $\frac{4\sqrt{29}}{29}$ C. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$ D. $\frac{3\sqrt{29}}{29}$

7. 已知三角形 ABC 中, $BC = 3$, 角 A 的平分线交 BC 于点 D , 若 $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$, 则三角形 AI

的最大值为

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

比较 $a = \frac{11}{10} - \frac{10}{11}$, $b = \ln 1.2$, $c = \frac{1}{5e^{0.1}}$ 的大小

- A. $a > c > b$ B. $b > c > a$ C. $b > a > c$ D. $a > b > c$

多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对得 5 分，部分选对但不全得 3 分，有错选的得 0 分。

已知实数 a, b, c 满足 $a > b > c$ ，且 $abc = 1$ ，则下列说法正确的是

- A. $(a+c)^2 > \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a-c} < \frac{1}{b-c}$
C. $a^2 > b^2$ D. $(a^2b-1)(ab^2-1) > 0$

已知 10 个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，设剩下的 8 个样本数据的方差为 s_1^2 ，平均数为 \bar{x}_1 ；最大和最小两个数据的方差为 s_2^2 ，平均数为 \bar{x}_2 ；原样本数据的方差为 S^2 ，平均数为 \bar{x} ，则

剩下的 8 个样本数据与原样本数据的中位数不变

$$\bar{x} = \bar{x}_1$$

剩下 8 个数据的下四分位数大于与原样本数据的下四分位数

$$S^2 = \frac{4}{5}s_1^2 + \frac{1}{5}s_2^2$$

知函数 $f(x) = \cos 2x + 2|\sin x|$ ，则

函数 $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增

直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

函数 $f(x)$ 的值域为 $[1, \frac{3}{2}]$

方程 $f(x) = a$ ($x \in (0, 2\pi)$) 最多有 8 个根，且这些根之和为 8π

椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 的中心为 O ， A, B 是 C 上的两个不同的点且满足 $OA \perp OB$ ，则

点 O 在直线 AB 上投影的轨迹为圆

圆的半径为 r ，则 OD 的最小值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\frac{2}{3}$

D. $\triangle ABC$ 中， AB 边上中线长的最小值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\tan \alpha = 2$ ，则 $\sin 4\alpha =$ _____.

14. 若 $(x^2 - x - 3)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ ，则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 =$ _____.

15. 已知四棱锥的各个顶点都在同一个球面上，若该球的体积为 36π ，则该四棱锥体积的最大值是 _____.

16. 已知函数 $f(x) = e^x + m \sin x - \frac{1}{2}x^2 - (m+1)x + 1$ ，在 $x=0$ 处取到极小值，则实数 $m =$ _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，设 $c_n = \log_3 a_n$ ，若数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n = \frac{n^2 + n}{2}.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 记 $d_n = a_n \cdot (2n^2 + 6n + 5)$ ，求数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $c = 2a \cos A \cos B - b \cos 2A$ ($A \leq B$).

(1) 求 A ；

(2) 若 D 是 BC 上的一点，且 $BD:DC = 1:2$ ， $AD = 2$ ，求 a 的最小值.

19. (12 分) 某单位组织知识竞赛，有甲、乙两类问题。现有 A, B, C 三位员工参加比赛，比赛规则为：先从甲类问题中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该员工比赛结束；若回答正确再从乙类问题中随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该员工比赛结束。每人两次回答问题的过程相互独立，三人回答问题也相互独立。甲类问题中每个问题回答正确得 20 分，否则得 0 分；乙类问题中每个问题回答正确得 80 分，否则得 0 分。已知 A 员工能正确回答甲类问题的概率为 0.5，能正确回答乙类问题的概率为 0.6；B 员工能正确回答甲类问题的概率为 0.6，能正确回答

率为 0.5；C 员工能正确回答甲类问题的概率为 0.4，能正确回答乙类问题的概率

分之和为 20 分的概率；

求 X 为 3 人中得分为 100 的人数，求随机变量 X 的数学期望。

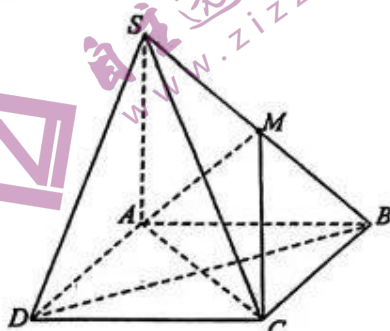
已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，

$$SA = AD = \frac{\sqrt{2}}{2} CD, M \text{ 是 } SB \text{ 的中点.}$$

$SA \perp BD$;

且 $SA = 2$ ，点 P 是 SC 上的动点，直线 AP 与平

面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ，求 $\frac{SP}{SC}$



(第 20 题图)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ， C 是椭圆的中心，点 M 为

满足 $|MF_1| \cdot |MF_2| = 5, |MC| = 2$.

求椭圆 C 的方程；

过点 $T(t, 0)$ ，过点 T 的直线 l 交椭圆 C 于 P, Q 两点，若在 C 上存在一点 A ，使得直线 AP 与直线 AQ 的斜率之和为定值，求 t 的范围。

已知函数 $f(x) = e^{ax} - e \frac{\ln x}{x} - ea (x > 0)$ 。

求函数 $g(x) = e^{ax-1} - \frac{f(x)}{e} + x - a$ 的单调区间；

当 $a < -e^{-2}$ 时，不等式 $f(x) > 0$ 恒成立。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线