

7. 当 $x, y \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{4x^4 + 17x^2y + 4y^2}{x^4 + 2x^2y + y^2} < \frac{m}{4}$ 恒成立, 则 m 的取值范围是

- A. $(25, +\infty)$ B. $(26, +\infty)$ C. $(\frac{99}{4}, +\infty)$ D. $(27, +\infty)$

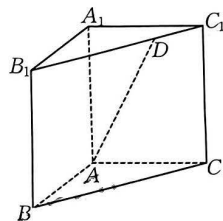
8. 已知 A, B, C, D 是球 O 的球面上的四个点, 圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 若圆 O_1 的面积为 π , $AB=AC=BC=OO_1$, 则四面体 $ABCD$ 体积的最大值为

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{9+6\sqrt{3}}{4}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

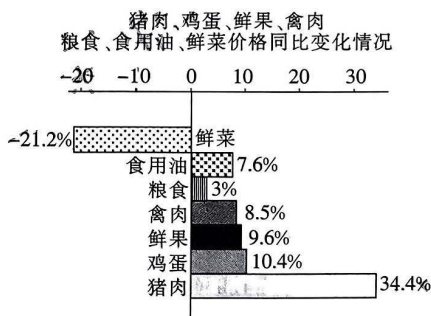
9. 《九章算术》中, 将上、下底面为直角三角形的直三棱柱叫做堑堵, 在如图所示的堑堵中, $AB \perp AC$, $\overrightarrow{B_1D} = 2\overrightarrow{DC_1}$, 则

- A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
 B. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
 C. 向量 \overrightarrow{AD} 在向量 \overrightarrow{AB} 上的投影向量为 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$
 D. 向量 \overrightarrow{AD} 在向量 \overrightarrow{AC} 上的投影向量为 $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$



10. 2022 年 11 月, 国内猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油、鲜菜价格同比(与去年同期相比)的变化情况如下图所示, 则下列说法错误的是

- A. 猪肉、鸡蛋、鲜果、禽肉、粮食、食用油这 6 种食品中, 食用油价格同比涨幅最小
 B. 猪肉价格同比涨幅超过禽肉价格同比涨幅的 5 倍
 C. 去年 11 月鲜菜价格要比今年 11 月低
 D. 这 7 种食品价格同比涨幅的平均值超过 7%



11. 已知函数 $f(x) = e^x$, 则下列结论正确的有

- A. $y = f(x) - f(-x)$ 为奇函数
 B. $y = f(x) + f(-x)$ 为偶函数
 C. $\forall x_1, x_2$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$
 D. $\forall x \geq 0, f(x) - f(-x) \geq 2x$

12. 椭圆曲线 $y^2 + ay = x^3 + bx^2 + cx + d$ 是代数几何中一类重要的研究对象. 关于椭圆曲线 $W: y^2 + 2y = x^3 - 4x^2 + 5x - 3$, 下列结论正确的有

- A. 曲线 W 关于直线 $x = -1$ 对称
 B. 曲线 W 关于直线 $y = -1$ 对称
 C. 曲线 W 上的点的横坐标的取值范围为 $[1, +\infty)$
 D. 曲线 W 上的点的横坐标的取值范围为 $\{1\} \cup [2, +\infty)$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填在答题卡中的横线上.

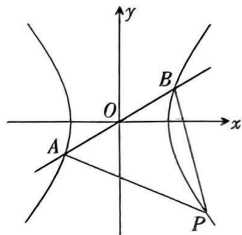
13. 已知向量 $m=(2,-3), n=(1,1)$, 则 $|m+n| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 在 $4^{0.2}, 0, 1^{-0.2}, 2\sin 3, 10^{0.15}$ 这 4 个数中, 最小的是 $\underline{\hspace{2cm}}$, 最大的是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

15. 2023 年 2 月 6 日, 土耳其发生 7.8 级地震, 我国在第一时间派出救援队进行救援. 已知某救援队共有 8 人, 根据救灾安排, 该救援队需要安排救援人员到三个地区实施救援, 每个地区至少两人, 每人只能去一个地区, 则共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种安排方案.

16. 如图, 已知过原点的直线与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 相交于

A, B 两点, 双曲线 C 的右支上一点 P 满足 $\tan \angle APB = \frac{5}{3}$, 若直线 PB 的斜率为 -3 , 则双曲线 C 的离心率为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $a \sin B = b \sin(A + \frac{\pi}{3})$.

(1) 求角 A 的大小.

(2) 若 $\cos B = -\frac{3}{5}$, 求 $\sin C$ 的值.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{nS_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

现有 4 个红球和 4 个黄球, 将其随机分配到甲、乙两个盒子中, 每个盒子中 4 个球.

(1) 求甲盒子中有 2 个红球和 2 个黄球的概率.

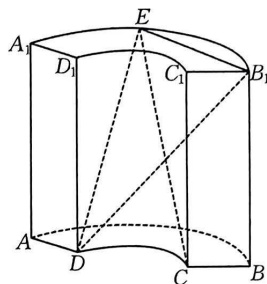
(2) 已知甲盒子中有 3 个红球和 1 个黄球, 若同时从甲、乙两个盒子中随机取出 $i (i=1, 2, 3)$ 个球进行交换, 记交换后甲盒子中的红球个数为 X , X 的数学期望为 $E_i(X)$. 证明: $E_1(X) + E_3(X) = 4$.

20. (12分)

中国古代数学著作《九章算术》中记载了一种被称为“曲池”的几何体. 该几何体是上、下底面均为扇环形的柱体(扇环是指圆环被扇形截得的部分). 在如图所示的“曲池”中, $AA_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 记弧 AB 、弧 DC 的长度分别为 l_1, l_2 , 已知 $AD=1, l_1=2l_2=\frac{4\pi}{3}$, E 为弧 A_1B_1 的中点.

(1) 证明: $A_1D_1 \perp DE$.

(2) 若 $AA_1=4AD$, 求直线 CE 与平面 DEB_1 所成角的正弦值.



21. (12分)

椭圆 E 的中心为坐标原点, 坐标轴为对称轴, 左、右顶点分别为 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 点 $(1, \sqrt{6})$ 在椭圆 E 上.

(1) 求椭圆 E 的方程.

(2) 过点 $(-1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 E 交于 P, Q 两点(异于点 A, B), 记直线 AP 与直线 BQ 交于点 M , 试问点 M 是否在一条定直线上? 若是, 求出该直线方程; 若不是, 请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - \frac{1}{2}x^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 存在两个零点 x_1, x_2 , 且曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 处的切线交于点 (x_0, y_0) . ① 求实数 a 的取值范围; ② 证明: $x_1 + x_2 > 2x_0$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

