

黄冈市 2020 届 9 月调研试题

高三数学参考答案（理科）

一、选择题 1.C 2.C 3.D 4.A 5.A 6.C 7.D 8.D 9.B 10.B 11.B 12.C

二、填空题 13. $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (\frac{1}{2}, 1]$ 14. -6 15. $-\frac{29}{4} < m < -\sqrt{3}$ 16. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

三、解答题

17.(1) $\because \neg q$ 为: $\exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - 2mx_0 + 1 < 0$,2 分

$\therefore$ 命题 $\neg q$ 为真命题时, 有 $\Delta = 4m^2 - 4 > 0$, 则 $m < -1$ 或 $m > 1$5 分

(2) 若命题 $p \wedge q$ 为真命题, 则 p 真且 q 真.

命题 p 为真时, 即方程 $2\sin^2 x - \sin x + m - 1 = 0$, 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上存在唯一实数根, 转化为

$m = -2\sin^2 x + \sin x + 1$, 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上存在唯一实数根,6 分

令 $f(x) = -2\sin^2 x + \sin x + 1, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 则 $f(x) = -2(\sin x - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8}$7 分

由 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 知 $\sin x \in [0, 1]$, $\therefore f(x) \in [0, \frac{9}{8}]$, 作出图象,

由图可知 $m \in [0, 1)$ 或 $m = \frac{9}{8}$ 时 方程存在唯一实数根.8 分

命题 q 为真命题时, 有 $\Delta = 4m^2 - 4 \leq 0$, 则 $-1 \leq m \leq 1$.

所以当 $p \wedge q$ 为真命题时, m 的取值范围是 $[0, 1)$10 分

18.解 (1) $f'(x) = \omega \cos(\omega x + \varphi)$, $g(x) = \sin(\omega x + \varphi) + \sqrt{3}\omega \cos(\omega x + \varphi)$,

$g(x)_{\max} = \sqrt{1 + (\sqrt{3}\omega)^2} = 2, \because \omega > 0, \therefore \omega = 1$, 又 $g(x)$ 奇函数, $g(0) = \sin \varphi + \sqrt{3} \cos \varphi = 0$,

$0 < \varphi < \pi$, $\therefore \varphi = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore g(x) = 2\sin(x + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = -2\sin x$ 6 分

(2) $a = \frac{\tan B}{\tan A} = g(-\frac{\pi}{2}) = 2$, 且 $\cos A \sin B = 2 \sin A \cos B, \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}, b = \frac{2 \sin B}{\sin A}$

$\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = 3 \sin A \cos B$,

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2 \sin B}{\sin A} \times 3 \sin A \cos B = 6 \sin B \cos B = 3 \sin 2B$

故当 $B = \frac{\pi}{4}$ 时 $\triangle ABC$ 的面积最大值为 3.12 分

19.解:(1) 证明: $a_n - b_n = \frac{1}{2} (3a_{n-1} - b_{n-1}) - (-\frac{1}{2}) (a_{n-1} - 3b_{n-1}) = 2(a_{n-1} - b_{n-1})$,3 分

又 $a_1 - b_1 = 5 - (-1) = 6$, 所以 $\{a_n - b_n\}$ 是首项为 6, 公比为 2 的等比数列.5 分

(2) 由(1)知, $a_n - b_n = 3 \cdot 2^n$. ①7 分

因为 $a_n+b_n=\frac{1}{2}(3a_{n-1}-b_{n-1})+(-\frac{1}{2})(a_{n-1}-3b_{n-1})=a_{n-1}+b_{n-1}$, $a_1+b_1=5+(-1)=4$, 所以 $\{a_n+b_n\}$ 为常数列且 $a_n+b_n=4$. ②

联立①②得 $a_n=3 \cdot 2^{n-1}+2$,9 分

$$\text{故 } \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{(3 \cdot 2^{n-1}+2)(3 \cdot 2^n+2)} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}+2} - \frac{1}{3 \cdot 2^n+2}.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_n &= \left(\frac{1}{3 \cdot 2^0+2} - \frac{1}{3 \cdot 2^1+2} \right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 2^1+2} - \frac{1}{3 \cdot 2^2+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}+2} - \frac{1}{3 \cdot 2^n+2} \right) \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 2^n+2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

20.解 (1)由已知 $c=1$, $a-b+c=-1$, 且 $-\frac{b}{2a}=-1$,2 分

解得 $a=2$, $b=4$, $\therefore f(x)=2(x+1)^2-1$3 分

$$\therefore F(x) = \begin{cases} 2(x+1)^2-1, & x>0, \\ 1-2(x+1)^2, & x<0. \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\therefore F(3)+F(-3)=2(3+1)^2-1+1-2[(-3+1)^2]=24. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2)由 $a=3$, $c=1$, 得 $f(x)=3x^2+bx+1$,

从而 $|f(x)| \leq 2$ 在区间 $(0, 2]$ 上恒成立等价于 $-2 \leq 3x^2+bx+1 \leq 2$ 在区间 $(0, 2]$ 上恒成立,8 分

即 $b \leq \frac{1}{x}-3x$ 且 $b \geq -\frac{3}{x}-3x$ 在 $(0, 2]$ 上恒成立.10 分

又 $\frac{1}{x}-3x$ 的最小值为 $-\frac{11}{2}$, $-\frac{3}{x}-3x$ 的最大值为 -6 . $\therefore -6 \leq b \leq -\frac{11}{2}$.

故 b 的取值范围是 $[-6, -\frac{11}{2}]$12 分

21.解析: (1)由题意, 在 $\text{Rt}\triangle BOE$ 中, $OB=60$, $\angle B=90^\circ$, $\angle BOE=\alpha$, $\therefore OE=\frac{60}{\cos\alpha}$, $\text{Rt}\triangle AOF$ 中, $OA=60$,

$$\angle A=90^\circ, \angle AFO=\alpha, \therefore OF=\frac{60}{\sin\alpha}. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \angle EOF=90^\circ, \therefore EF=\sqrt{OE^2+OF^2}=\sqrt{\left(\frac{60}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{60}{\sin\alpha}\right)^2}=\frac{60}{\cos\alpha\sin\alpha},$$

$$\text{所以 } l=OE+OF+EF=\frac{60}{\cos\alpha}+\frac{60}{\sin\alpha}+\frac{60}{\cos\alpha\sin\alpha}, \text{ 即 } l=\frac{60(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{\cos\alpha\sin\alpha}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

当点 F 在点 D 时, 这时角 α 最小, 求得此时 $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

当点 E 在 C 点时, 这时角 α 最大, 求得此时 $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

故此函数的定义域为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$6 分

注: 定义域错误扣 1 分

(2)由题意知, 要求铺路总费用最低, 只要求 $\triangle OEF$ 的周长 l 的最小值即可.

$$\text{由(1)得, } l=\frac{60(\sin\alpha+\cos\alpha+1)}{\cos\alpha\sin\alpha}, \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right],$$

$$\text{设 } \sin\alpha+\cos\alpha=t, \text{ 则 } \sin\alpha \cdot \cos\alpha=\frac{t^2-1}{2},$$

$$\therefore l = \frac{60(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)}{\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{60(t+1)}{\frac{t^2-1}{2}} = \frac{120}{t-1} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], \text{ 得 } \frac{5\pi}{12} \leq \alpha + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{12}, \text{ 得 } \frac{\sqrt{3}+1}{2} \leq t \leq \sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leq t-1 \leq \sqrt{2}-1,$$

$$\text{从而 } \sqrt{2}+1 \leq \frac{1}{t-1} \leq \sqrt{3}+1, \text{ 当 } \alpha = \frac{\pi}{4}, \text{ 即 } BE=60 \text{ 时, } l_{\min} = 120(\sqrt{2}+1), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

答: 当 $BE=AF=60$ 米时, 铺路总费用最低, 最低总费用为 $36\,000(\sqrt{2}+1)$ 元. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

$$22. \text{ 解(1)} \because f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + a, \text{ 又 } f'(0) = 1, \therefore f'(0) = 1 - 1 + a = 1, \text{ 即 } a = 1. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + x + b, \text{ 由函数 } F(x) = f(x) - f'(x) \text{ 存在零点 } x=0 \text{ 得}$$

$$F(0) = f(0) - f'(0) = 0, \therefore f(0) = 1 + b = 1, \text{ 故 } b = 0. \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 当 } x \geq 0 \text{ 时, 不等式 } f(x) \geq \frac{mx}{x+1} \text{ 恒成立等价于 } f(x) - \frac{mx}{x+1} \geq 0 \text{ 恒成立, 显然 } x=0 \text{ 时不等式对任意实数}$$

$$m \text{ 恒成立, 因此, 只需讨论 } x > 0 \text{ 时恒成立的 } m \text{ 取值. 使不等式 } f(x) \geq \frac{mx}{x+1} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

$$\therefore \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + x \geq \frac{mx}{x+1} (x > 0), \text{ 即 } \ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x} + x + 1 \geq m.$$

$$\text{令 } \varphi(x) = \ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{1}{x} + x + 1 (x > 0),$$

$$\text{则 } \varphi'(x) = \frac{x^2 - 1 + x^2(x+1) - (x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{x^2 + x - 1 - \ln(x+1)}{x^2}, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

由 $\varphi'(x) = 0$, 得, $\therefore x^2 + x - 1 = \ln(x+1)$, 依题设知该方程的一个正根为 $x_0 = \frac{9}{10}$. $\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{9}{10})$, 分别作出 $y = x^2 + x - 1$ 和 $y = \ln(x+1)$ 的图象, 由图象可知 $\varphi'(x) < 0$, 当 $x \in (\frac{9}{10}, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 又

$$\ln(x_0 + 1) = x_0^2 + x_0 - 1$$

$$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(x_0) = x_0^2 + 3x_0 + 1 = \frac{451}{100}, \therefore m \leq \frac{451}{100}.$$

$$\text{即所求的 } m \text{ 取值为 } \left[-\infty, \frac{451}{100}\right]. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

命题人: 蕲春一中 宋春雨

审题人: 蕲春一中 邓璇

黄州区一中 童云霞

黄冈中学 钱程

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注