2022—2023学年2023届高三下学期3月质量检测考试

数　　学

座位号＿＿＿＿　考号＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿　班级＿＿＿＿　学校＿＿＿＿

密　封　线　内　不　要　答　题

注意事项：

1. 本试卷满分150分，考试时间120分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并收回。

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|x^2-3x<4\}$，$B=\{x||x|\geqslant 2\}$，则 $(\complement_U B)\cup A=$

A. $(-2,4)$　　B. $(-4,2)$　　C. $(-2,2)$　　D. $(-4,4)$

2.已知复数 z_1,z_2 满足 $|z_1|=3$，$z_2=2+\mathrm{i}$，则 $|z_1\cdot z_2|=$

A. $3\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{6}$　　C. $3\sqrt{5}$　　D. 6

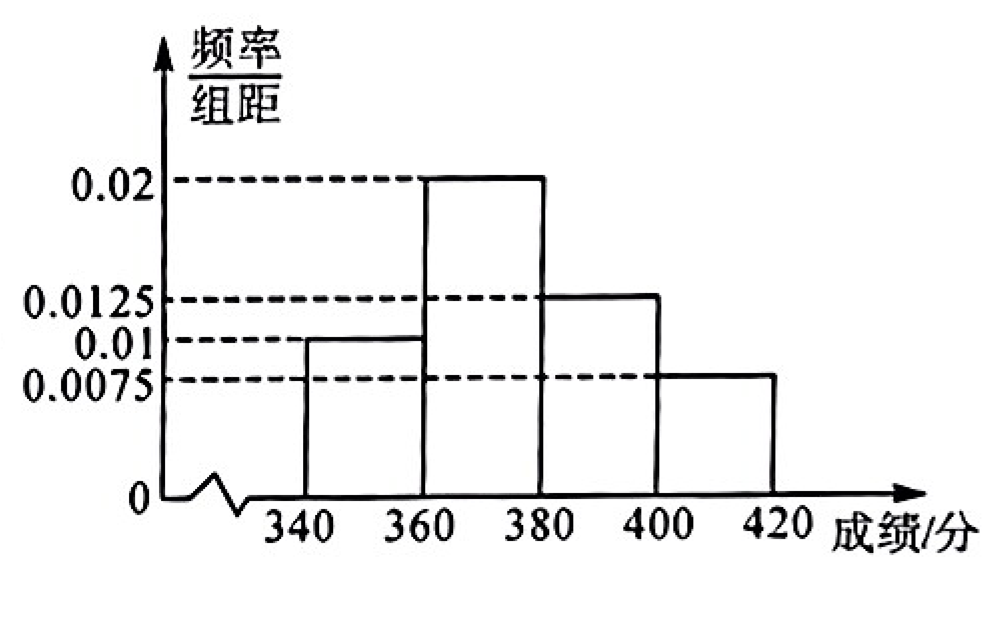
3.已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，点 $P(x_0,1)(x_0>0)$ 在抛物线 C 上，过 P 作 l 的垂线，垂足为 Q，若 $|PO|=|PQ|$（O 为坐标原点），则 $x_0=$

A. $2\sqrt{2}$　　B. 3　　C. $3\sqrt{2}$　　D. 4

4.已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{2})$，$\boldsymbol{b}=(\cos\theta,\sin\theta)$（其中 $\theta\in(0,2\pi)$），若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|$，则 $\tan\theta=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{6}$

5.2023年考研成绩公布不久，对某校“软件工程”专业参考的200名考生的成绩进行统计，可以得到如图所示的频率分布直方图，其中分组的区间为[340,360)，[360,380)，[380,400)，[400,420]，同一组中的数据用该组区间的中间值作代表值，则下列说法中不正确的是



A. 这200名学生成绩的众数为370分

B. 这200名学生成绩的平均分为377分

C. 这200名学生成绩的70%分位数为386分

D. 这200名学生成绩在[400,420]中的学生有30人

6. 有一个正三棱柱形状的石料，该石料的底面边长为 6. 若该石料最多可打磨成四个半径为$\sqrt{3}$的石球，则至少需要打磨掉的石料废料的体积为

A. $216-4\sqrt{3}\pi$　　B. $216-16\sqrt{3}\pi$　　C. $270-16\sqrt{3}\pi$　　D. $270-4\sqrt{3}\pi$

7. 已知函数 $f(x)=4x^4-6tx^3+(2t^2+6)x^2-3tx+1(x>0)$，若 $f(x)$ 的最小值为 0，则 $t=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $2\sqrt{2}$

8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=e^x-ax+e^3$. 若存在等差数列 x_1，x_2，x_3，x_4（$x_1<x_2<x_3<x_4$），且 $x_1+x_4=0$，使得数列 $\{f(x_n)\}(n=1,2,3,4)$ 为等比数列，则 a 的最小值为

A. $\frac{1}{4}e^3+\frac{3}{4}e$　　B. $\frac{3}{4}e^3+\frac{1}{4}e$　　C. $\frac{e^3+e}{2}$　　D. $\frac{2}{3}e^3+\frac{1}{3}e$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 亚马逊大潮是世界潮涌之最，当潮涌出现时，其景、其情、其声，真是“壮观天下无”，在客观现实世界中，潮汐的周期性变化现象，我们通常需要借助于三角函数这一重要数学模型来研究. 已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称，则下列选项正确的是

A. $\varphi=\frac{\pi}{3}$

B. 直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减

D. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内存在极值点

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q>0)$，前 n 项积为 T_n，若 $T_7>T_6>T_8$，则

A. $0<q<1$　　B. $q>1$　　C. $T_{13}>1>T_{14}$　　D. $T_{14}>1>T_{15}$

11. 在 $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n(n\in N^*)$ 的展开式中，有理项恰有两项，则 n 的可能取值为

A. 7　　B. 9　　C. 12　　D. 13

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，直线 $y=t(t\in(0,2))$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点（其中 A 在 B 的左侧），记 $\triangle ABF_1$ 的面积为 S，则

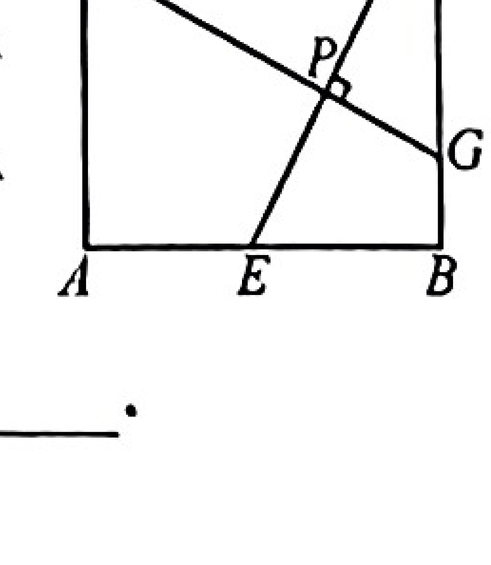
A. $|F_1A|+|F_1B|=4\sqrt{2}$　　B. 当 $AF_1\perp BF_1$ 时，$t=\sqrt{3}$

C. S 的最大值为 $2\sqrt{2}$　　D. 当 $\angle F_1AF_2=\frac{\pi}{3}$ 时，$S=\frac{8}{3}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 古希腊毕达哥拉斯学派在公元前 6 世纪研究过正五边形和正十边形的作图，发现了黄金分割值约为 0.618，这一数值也可以表示为 $a=2\cos 72°$，则 $\frac{a\cos 18°}{\sqrt{2-a}}=$________.

14. 已知 $\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}-2=\frac{\sqrt{ab}-4ab}{2ab}(a>0,b>0)$，则 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$ 的最小值为________.



15. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，E 是边 AB 上的一动点，$FG\perp EC$ 交 EC 于点 P，且直线 FG 平分正方形 $ABCD$ 的周长，当线段 BP 的长度最小时，点 A 到直线 BP 的距离为________.

16. 若曲线 $y=\frac{a}{x}(x>0)$ 与曲线 $y=2\ln x$ 存在公切线，则 a 的取值范围为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

在$\triangle ABC$中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $A=\frac{\pi}{3}$，且$\triangle ABC$的周长为 6.

(1)证明：$bc+12=4(b+c)$；

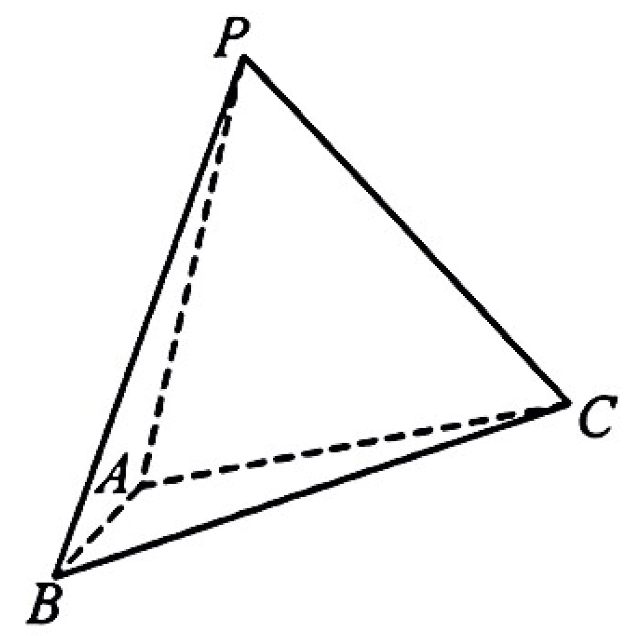
(2)求$\triangle ABC$面积的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，平面 $PAB\perp$平面 ABC，$\angle PBA=\angle CBA=45°$，$BP=BC=2\sqrt{2}$，$AB=1$.

(1)证明：$AB\perp PC$；

(2)求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

有三种不同的果树苗 A,B,C，经引种试验后发现，引种树苗 A 的自然成活率为 0.6，引种树苗 B,C 的自然成活率均为 $p(0.6\leqslant p\leqslant 0.8)$.

(1)任取树苗 A,B,C 各一株，设自然成活的株数为 X，求 X 的分布列及 $E(X)$；

(2)将(1)中的 $E(X)$ 取得最小值时的 p 的值作为 B 种树苗自然成活的概率. 该农户决定引种 $n(n\in\mathbf{N}^*)$株 B 种树苗，引种后没有自然成活的树苗中有 80%的树苗可经过人工栽培技术处理，处理后成活的概率为 0.5，其余的树苗不能成活.

①求一株 B 种树苗最终成活的概率；

②若每株树苗引种最终成活后可获利 400 元，不成活的每株亏损 60 元，该农户为了获利不低于 30 万元，应至少引种 B 种树苗多少株？

20.(本小题满分 12 分)

已知数列$\{a_n\}$各项均为正数,$a_1=1$,$a_{n+1}>a_n$,且$a_{n+2}+a_n=a_2\cdot a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)若数列$\{a_{n+1}-a_n\}$为等差数列,求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n;

(2)若数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$为等比数列,且数列$\{a_n\}$不为等比数列,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

21.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的焦距为 8.过左焦点 F 的直线与双曲线 C 的左支交于 A,B 两点,分别过 A,B 两点作直线 l:$x=-1$ 的垂线,垂足分别为 M,N.且当 AB 垂直于 x 轴时,$|MN|=12$.

(1)求双曲线 C 的标准方程;

(2)设点 $P(2\sqrt{3}-1,0)$,判断是否存在 $t>0$,使得$\frac{1}{|PM|-t}+\frac{1}{|PN|-t}$为定值?若存在,求出 t 的值;若不存在,请说明理由.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2\ln x-a(a\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$的单调区间;

(2)若函数 $f(x)$有两个零点 x_1,x_2,证明:$1<x_1+x_2<\frac{2}{\sqrt{e}}$.