考生注意：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x\leqslant 4x+5\}$，$B=\{x|x^2<4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|0<x<2\}$　　B. $\{x|-\frac{5}{3}\leqslant x<2\}$

C. $\{x|x\geqslant-\frac{5}{3}\}$　　D. $\{x|-2<x<2\}$

2. 已知复数 $z=\frac{-2+i}{1+2i}+1-2i$，则 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

A. $-1+i$　　B. $1+i$　　C. $1-i$　　D. $-1-i$

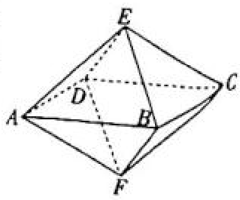
3. 若向区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 内随机投点，则该点落在区域 $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}\}$ 内的概率为

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{8}$　　C. $\frac{\pi}{16}$　　D. $\frac{\pi}{32}$

4. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}2x+y-2\leqslant 0,\\ x-y-1\geqslant 0,\\ y+2\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=4x+y$ 的最大值为

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

5. 正多面体被古希腊圣哲认为是构成宇宙的基本元素，加上它们的多种变体，一直是科学、艺术、哲学灵感的源泉之一. 如图，该几何体是一个棱长为 2 的正八面体，则此正八面体的体积与表面积之比为



A. $\frac{\sqrt{6}}{18}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{9}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{12}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

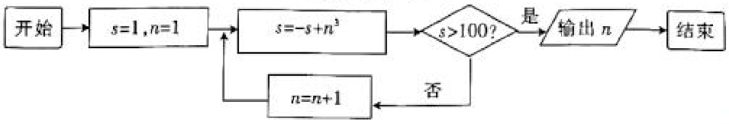
6. 已知 $\alpha\in(0,\pi)$，且 $\cos 2\alpha=2\cos\alpha-\cos^2\alpha$，则 $\sin\alpha=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

7. 设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D，E 两点. 若 C 的焦距为 4，则△ODE 面积的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 8

8. 下图是某算法的程序框图，则程序运行后输出的结果是

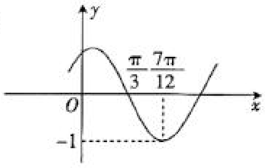


A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

9. 已知 A,B 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点，P,Q 是椭圆上的不同两点且关于 x 轴对称，设直线 AP,BQ 的斜率分别为 m,n，若 $mn=\frac{1}{4}$，则该椭圆的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则



A. $\omega=3$

B. $\varphi=\frac{\pi}{6}$

C. $f(0)+f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{2\pi}{6})+f(\frac{3\pi}{6})+f(\frac{4\pi}{6})+\cdots+f(\frac{2019\pi}{6})=0$

D. $f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{2\pi}{6})+f(\frac{3\pi}{6})+f(\frac{4\pi}{6})+\cdots+f(\frac{2019\pi}{6})=0$

11. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)-f(x)=2x+1$，且 $f(1)=-1$. 对任意 $x_1>x_2>-1$，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>m(x_1-x_2)$ 成立，则 m 的取值范围为

A. $[-2,-1]$　　B. $[-2,-1)$　　C. $[-4,-1]$　　D. $[-4,-1)$

12. 设函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，若存在 $[a,b]\subseteq[\frac{1}{e},e]$，使得 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的值域为 $[ka,kb]$，则实数 k 的取值范围为

A. $[\frac{1}{e^2},\frac{1}{2e})$　　B. $[\frac{1}{e^2},1)$　　C. $[\frac{1}{2e},\frac{1}{e})$　　D. $[\frac{1}{2e},1)$

第Ⅱ卷

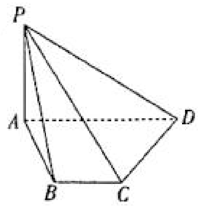
二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,m)$，$\boldsymbol{b}=(m-1,-3)$，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|$，则 $m=$ ____▲____.

14. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是减函数，若 $f(m)+f(3-2m)>f(0)$，则 m 的取值范围为____▲____.

15. 在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，$A=\frac{\pi}{4}$，$c\sin A=4\sin C$，若此三角形有两解，则 b 的取值范围是____▲____.

16. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，若 $PA=AD=2$，$AD\parallel BC$，$\angle DAB=\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，$PC$ 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为____▲____.

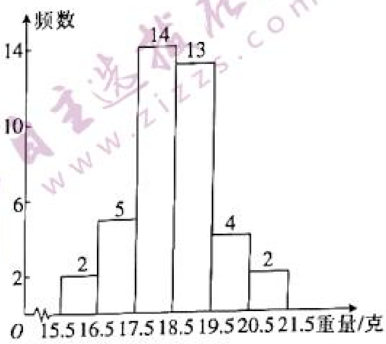


三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.(12 分)

为了解某农场的种植情况，该农场的技术人员对种植出来的水果进行抽样检测，将测得的水果重量分成$[15.5,16.5)$，$[16.5,17.5)$，$[17.5,18.5)$，$[18.5,19.5)$，$[19.5,20.5)$，$[20.5,21.5]$六组进行统计，得到如图所示的统计图.



(1)估计该农场的水果重量的平均数(同一组当中的水果重量用该组的中间值代替)；

(2)从样本中重量不小于 19.5 克的水果中任取 2 个，求至少有 1 个水果的重量不小于 20.5 克的概率.

18.(12 分)

已知数列$\{a_n\}$的首项为$\frac{1}{2}$，且满足$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

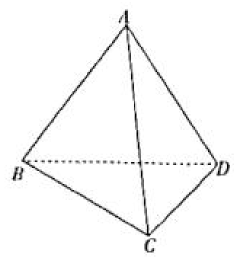
(2)已知$b_n=a_n+\frac{1}{na_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

19.(12 分)

如图，在四面体 $ABCD$ 中，$\triangle ABD$ 是等边三角形，且 $AC=BC$.

(1)证明：$AB\perp CD$.

(2)若 $AB=2$，$AC=\sqrt{3}$，$BC\perp CD$，求点 B 到平面 ACD 的距离.



20.（12 分）

已知动点 M 到点 $F(3,0)$ 的距离比它到直线 $l:x+5=0$ 的距离小 2.

(1)求动点 M 的轨迹 E 的方程.

(2)过点 F 作斜率为 $k(k\neq 0)$ 的直线 l' 与轨迹 E 交于点 A,B，线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 N，证明：$\frac{|AB|}{|FN|}$ 为定值.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln x-x$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若不等式 $f(x)\geqslant(\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}^x$ 对 $x\in[1,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+2t,\\y=3-2t\end{cases}$（$t$ 为参数），曲线 C 的方程为 $x^2-4x+y^2+2=0$，以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求直线 l 和曲线 C 的极坐标方程；

(2)若射线 $\theta=\alpha(0<\alpha<2\pi)$ 与曲线 C 相切于点 M（点 M 位于第一象限），且与直线 l 相交于点 N，求 $|MN|$.

23. [选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知正实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ac=abc$.

(1)证明：$a+b+c\geqslant 9$.

(2)证明：$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\geqslant 1$.

2020～2021年度河南省高三质量检测(五)
数学参考答案(文科)

1. B　$\because A=\{x|x\leqslant 4x+5\}=\{x|x\geqslant -\frac{5}{3}\}$，$B=\{x|-2<x<2\}$，$\therefore A\cap B=\{x|-\frac{5}{3}\leqslant x<2\}$.

2. B　$z=\frac{-2+i}{1+2i}+1-2i=\frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}+1-2i=\frac{5i}{5}+1-2i=1-i$，则 $\bar{z}=1+i$.

3. C　区域 D 的面积为 $1\times1=1$，在区域 D 中，满足 $x^2+y^2\leqslant\frac{1}{4}$ 的面积为 $\frac{1}{4}\pi\times(\frac{1}{2})^2=\frac{\pi}{16}$，

　　则所求概率 $P=\frac{\pi}{16}$.

4. C　作出不等式组表示的可行域(图略)，当直线 $y=-4x+z$ 过点 $(2,-2)$ 时，z 取得最大值 6.

5. B　正八面体的上、下结构是两个相同的正四棱锥，由勾股定理求得斜高，再由棱锥的体积公式即可求解.

　　由边长为 2，可得正八面体上半部分的斜高为 $\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$，高为 $\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，则其体积为 $\frac{2\times2\times\sqrt{2}}{3}\times2=\frac{8\sqrt{2}}{3}$，其表面积为 $8\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=8\sqrt{3}$，所以此正八面体的体积与表面积之比为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

6. D　由 $\cos 2\alpha=2\cos\alpha-\cos^2\alpha$，得 $3\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$，解得 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ 或 $\cos\alpha=1$.

　　又因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，则 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

7. B　不妨设 D 在第一象限，E 在第四象限，联立方程组 $\begin{cases}x=a,\\ y=\frac{b}{a}x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=a,\\ y=b,\end{cases}$ 故 $D(a,b)$，同理可得 $E(a,-b)$，

　　所以 $|ED|=2b$，$S_{\triangle ODE}=\frac{1}{2}a\times2b=ab$. 因为 C 的焦距为 4，所以 $c=2$，$c^2=a^2+b^2\geqslant 2ab$，解得 $ab\leqslant2$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $S_{\triangle ODE}$ 的最大值为 2.

8. C　按照程序框图执行程序，输入 $s=1,n=1,s=-1+1^3=0$，不满足 $s>100$，循环；
$n=2,s=0+2^3=8$，不满足 $s>100$，循环；
$n=3,s=-8+3^3=19$，不满足 $s>100$，循环；
$n=4,s=-19+4^3=45$，不满足 $s>100$，循环；
$n=5,s=-45+5^3=80$，不满足 $s>100$，循环；
$n=6,s=-80+6^3=136$，满足 $s>100$，输出 $n=6$.

9. C　设 $P(x_0,y_0)$，则 $Q(x_0,-y_0)$，$m=\frac{y_0}{x_0-a}$，$n=\frac{-y_0}{x_0+a}$，$mn=-\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}$，又因为 $y_0^2=-\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$，所以 $mn=\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. D　由函数图象可知 $\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，即 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi\Rightarrow\omega=2$，

　　将 $(\frac{7\pi}{12},-1)$ 代入得 $\sin(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi)=-1\Rightarrow\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

　　$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

　　又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$，$\therefore f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，

　　$\therefore f(\frac{n\pi}{6})=\sin(\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{3})$ 是以 6 为最小正周期的周期函数，

　　则 $f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{2\pi}{6})=\sin\pi=0$，$f(\frac{3\pi}{6})=\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{4\pi}{6})=\sin\frac{5\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f(\frac{5\pi}{6})=\sin2\pi=$

$0, f(\frac{6\pi}{6})=\sin\frac{7\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore f(\frac{\pi}{6})+f(\frac{2\pi}{6})+f(\frac{3\pi}{6})+f(\frac{4\pi}{6})+\cdots+f(\frac{2019\pi}{6})=0$.

11. A　设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$，
则 $f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$，
又$\because f(x+1)=f(x)-2x+1$，
$\therefore ax^2+(2a+b)x+a+b+c=ax^2+(b-2)x+c+1$，
$\therefore\begin{cases}2a+b=b-2,\\a+b+c=c+1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$
$\because f(1)=-1$，$\therefore a+b+c=-1$，$\therefore c=-2$，
$\therefore f(x)=-x^2+2x-2$.
$\because\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>m(x_1+x_2)$，$\therefore f(x_1)-mx_1^2>f(x_2)-mx_2^2$，
$\because x_1>x_2>-1$，$\therefore$函数 $f(x)-mx^2$ 在$(-1,+\infty)$上单调递增.
令 $g(x)=f(x)-mx^2=(-1-m)x^2+2x-2$.
当 $m=-1$ 时，$g(x)=2x-2$ 满足题意；
当 $m\neq-1$ 时，$\begin{cases}-m-1>0,\\\frac{2}{2(1+m)}\leqslant-1,\end{cases}$解得 $-2\leqslant m<-1$.
综上，m 的取值范围为$[-2,-1]$.

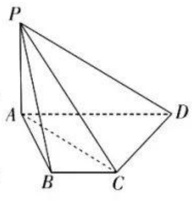
12. A　$\because f'(x)=\frac{1-\ln x}{x}$，$\therefore f(x)$在$[\frac{1}{e},e]$上单调递增，
又 $f(x)$在$[a,b]$上的值域为$[ka,kb]$，
$\therefore\begin{cases}f(a)=\frac{\ln a}{a}=ka,\\f(b)=\frac{\ln b}{b}=kb,\end{cases}$则$\frac{\ln x}{x^2}=k$ 在$[\frac{1}{e},e]$上有两个不同解.
令 $h(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in[\frac{1}{e},e]$，$h'(x)=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，则 $h(x)$在$[\frac{1}{e},\sqrt{e}]$上单调递增，在$[\sqrt{e},e]$上单调递减.
又 $h(\frac{1}{e})=-e^2$，$h(e)=\frac{1}{e^2}$，$h(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$，$\therefore k\in[\frac{1}{e^2},\frac{1}{2e})$.

13. $-\frac{4}{3}$　由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|$，所以 $m-1-3m=\sqrt{1+m^2}$，则 $m=-\frac{4}{3}$或 $m=0$(舍去).

14. $(3,+\infty)$　由题可知函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $f(0)=0$，故 $f(m)+f(3-2m)>f(0)$可化为 $f(m)>f(2m-3)$，则 $m<2m-3$，解得 $m>3$，即 m 的取值范围为$(3,+\infty)$.

15. $(4,4\sqrt{2})$　由 $c\sin A=4\sin C$，可得 $a=4$，由正弦定理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{4}{\sin\frac{\pi}{4}}=4\sqrt{2}$，即 $\sin B=\frac{b}{4\sqrt{2}}$. 又三角形有两解，所以只需$\begin{cases}b>a,\\\sin B<1,\end{cases}$即 $4<b<4\sqrt{2}$.

16. 8π　连接 AC，则$\angle PCA$ 为 PA 与平面 ABC 所成角，即 $\tan\angle PCA=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以 $AC=\sqrt{3}$. 因为 $AD\parallel BC$，$\angle DAB=\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，所以四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，且可求得 $CD=1$，$AC\perp CD$，所以底面 $ABCD$ 外接圆的半径为 1，且四边形 $ABCD$ 外接圆的圆心为 AD 的中点，四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的半径 $R=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，故该四棱锥外接球的表面积 $S=4\pi R^2=8\pi$.



17. 解：(1)设该农场的水果重量的平均数为 $\bar{x}$，则
$\bar{x}=\frac{1}{40}(16\times2+17\times5+18\times14+19\times13+20\times4+21\times2)=18.45$. ………………………………………… 6 分
(2)重量不小于 19.5 克的水果有 6 个，记为 a,b,c,d,E,F，

其中重量不小于 20.5 克的水果有 2 个，记为 E,F. ………… 7 分

从 a,b,c,d,E,F 中任取 2 个，有 $(a,b),(a,c),(a,d),(a,E),(a,F),(b,c),(b,d),(b,E),(b,F),(c,d),(c,E),(c,F),(d,E),(d,F),(E,F)$，共 15 种情况， ………… 9 分

至少有 1 个水果的重量不小于 20.5 克的有 $(a,E),(a,F),(b,E),(b,F),(c,E),(c,F),(d,E),(d,F),(E,F)$，共 9 种情况， ………… 11 分

则至少有 1 个水果的重量不小于 20.5 克的概率 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. ………… 12 分

18. 解：(1) 由 $(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$，得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}$. ………… 1 分

又 $a_1=\frac{1}{2}$，所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{n(n+1)}$. ………… 4 分

又 $n=1$ 也满足上式，所以 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$. ………… 5 分

(2) $b_n=a_n+\frac{1}{na_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+n+1$， ………… 7 分

所以 $S_n=(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})+\frac{(2+n+1)n}{2}$ ………… 10 分

$=1-\frac{1}{n+1}+\frac{n^2+3n}{2}=\frac{n^2+3n}{2}+\frac{n}{n+1}$. ………… 12 分

19. (1) 证明：取 AB 的中点 E，连接 CE,DE（图略），因为 $\triangle ABD$ 是等边三角形，所以 $DE\perp AB$. ………… 1 分

又 $AC=BC$，所以 $CE\perp AB$. ………… 3 分

又 $DE\cap CE=E$，所以 $AB\perp$ 平面 CDE，故 $AB\perp CD$. ………… 5 分

(2) 解：因为 $BD=AB=2$，$BC=AC=\sqrt{3}$，$BC\perp CD$，所以 $CD=\sqrt{BD^2-BC^2}=1$. ………… 6 分

又 $AD=2$，所以 $AC^2+CD^2=AD^2$，即 $AC\perp CD$，则 $S_{\triangle ACD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ………… 7 分

由题可得 $CE=\sqrt{AC^2-(\frac{AB}{2})^2}=\sqrt{2}$，$DE=\sqrt{AD^2-(\frac{AB}{2})^2}=\sqrt{3}$， ………… 8 分

则 $CD^2+CE^2=DE^2$，即 $CE\perp CD$，则 $S_{\triangle ECD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ………… 9 分

设点 B 到平面 ACD 的距离为 d，

因为 $AB\perp$ 平面 CDE，$V_{B-ACD}=V_{B-ECD}+V_{A-ECD}$，

所以 $\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot d=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ECD}\cdot AB$，即 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2$，解得 $d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$， ………… 11 分

即点 B 到平面 ACD 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ………… 12 分

20. (1) 解：由题意知，动点 M 到点 $F(3,0)$ 的距离与到直线 $l_1:x+3=0$ 距离相等. ………… 1 分

由抛物线的定义知，轨迹 E 是以 $F(3,0)$ 为焦点，以直线 $l_1:x+3=0$ 为准线的抛物线. ………… 3 分

所以点 M 的轨迹 E 的方程为 $y^2=12x$. ………… 5 分

(2) 证明：设直线 $l':x=ty+3$，

联立 $\begin{cases}x=ty+3,\\ y^2=12x,\end{cases}$ 得 $y^2-12ty-36=0$. ………… 6 分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，G 为线段 AB 的中点，

则 $y_1+y_2=12t$，$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+6=12t^2+6$，所以 $G(6t^2+3,6t)$， ………… 7 分

所以线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-6t=-t(x-6t^2-3)$，则 $N(6t^2+9,0)$. ………… 8 分

从而 $|FN|=6t^2+9-3=6t^2+6$， ………… 10 分

$|AB|=x_1+x_2+6=12t^2+12$，所以 $\frac{|AB|}{|FN|}=2$ 为定值. ………… 12 分

21. 解：(1)函数 $f(x)=a\ln x-x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$. ………… 1分

若 $a>0$，则当 $0<x<a$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增；

当 $x>a$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减. ………… 3分

若 $a\leqslant 0$，$f'(x)=\frac{a-x}{x}<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ………… 5分

(2)不等式 $f(x)\geqslant(\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}^x$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，即 $a\ln x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x\geqslant 0$ 恒成立，设 $g(x)=a\ln x+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}x$，$g'(x)=\frac{a}{x}+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}$，令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{a}{x^2}$. ………… 6分

①当 $a\geqslant 0$ 时，$g'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(1)=0$，

即 $a\geqslant 0$ 符合题意； ………… 8分

②当 $a<0$ 时，$h'(x)>0$ 恒成立，所以 $g'(x)$ 单调递增，

又因为 $g'(1)=a<0$，$g'(\ln(\mathrm{e}-a))=\frac{a}{\ln(\mathrm{e}-a)}-a=\frac{a[1-\ln(\mathrm{e}-a)]}{\ln(\mathrm{e}-a)}>0$， ………… 10分

所以存在 $x_0\in(1,\ln(\mathrm{e}-a))$，使得 $g'(x_0)=0$，且当 $x\in(1,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，

即 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，所以 $g(x_0)<g(1)=0$，即 $a<0$ 不符合题意. ………… 11分

综上，a 的取值范围为 $[0,+\infty)$. ………… 12分

22. 解：(1)消去 t 可得 $l:x+y-4=0$， ………… 1分

将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入普通方程，

可得直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4=0$， ………… 2分

曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta+2=0$. ………… 4分

(2)在极坐标系中，联立 $\begin{cases}\theta=\alpha,\\ \rho^2-4\rho\cos\theta+2=0,\end{cases}$ 可得 $\rho^2-4\rho\cos\alpha+2=0$.

因为射线 $\theta=\alpha$ 与曲线 C 相切，所以 $(4\cos\alpha)^2-4\times 2=0$，即 $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，又点 M 位于第一象限，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$，

………… 6分

所以 $|OM|=\sqrt{2}$. ………… 7分

联立 $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{4},\\ \rho\cos\theta+\rho\sin\theta-4=0,\end{cases}$ 解得 $\rho=2\sqrt{2}$，即 $|ON|=2\sqrt{2}$， ………… 8分

所以 $|MN|=|ON|-|OM|=\sqrt{2}$. ………… 10分

23. 证明：(1)因为 $ab+bc+ac=abc$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$， ………… 2分

所以 $a+b+c=(a+b+c)\cdot(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}=9$，当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

所以 $a+b+c\geqslant 9$. ………… 5分

(2) $\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}=\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-1=(\frac{b}{a^2}+\frac{1}{b})+(\frac{c}{b^2}+\frac{1}{c})+(\frac{a}{c^2}+\frac{1}{a})-1\geqslant\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-1=1$， ………… 8分

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号，

即 $\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2}\geqslant 1$. ………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》