2023年海南省屯昌县高三二模统考（A）

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．C　2．D　3．D　4．D　5．B　6．C　7．C　8．C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．CD　10．BC　11．ABD　12．BD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．-11　14．$-\dfrac{13}{9}$　15．559　16．28π

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（1）由于 $f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$,故 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le x-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，解得

$-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\le x\le\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi$，$k\in Z$,故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为$\left[-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right]$，$k\in Z$

（2）

$y=f^2(x)+\sqrt{3}\cos 2x-1=2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\cos 2x-1=\sqrt{3}\cos 2x-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x$

$=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$,当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$时，$2x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right]$，故当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\pi,x=\dfrac{5\pi}{12}$ 时，取最小值-2，

当 $2x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6},x=0$ 时，取最大值 $\sqrt{3}$．

18．（1）设等差数列$\{a_n\}$公差为d，等比数列$\{b_n\}$公比为q，

因为 $a_1=2,a_2+a_3=10$,所以 $a_2+a_3=2a_1+3d=10$,解得 $d=2$，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+2n-2=2n$．

$b_2b_3=b_1^2q^3=-8$,所以 $q=-2$，所以 $b_n=b_1q^{n-1}=(-2)^{n-1}$．

（2）$c_1+c_3+c_5+\cdots+c_{2n-1}=\left(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1}\right)+\left(b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{2n-1}\right)$

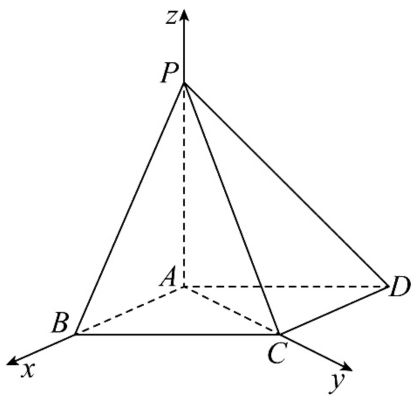
$=\left(2+6+10+\cdots+4n-2\right)+\left(2^0+2^2+\cdots+2^{2n-2}\right)=\dfrac{n(2+4n-2)}{2}+\dfrac{(1-4^n)}{1-4}$

$=2n^2+\dfrac{1}{3}\cdot 2^{2n}-\dfrac{1}{3}$．

19. （1）连接 AC，$\because PA\perp$ 面 $ABCD\therefore PA\perp AB, PA\perp AC$

$\because AB\perp PA$， $AB\perp PC$， $PA\subset$ 面 PAC， $PC\subset$ 面 PAC，

$PA\cap PC=P$， $\therefore AB\perp$ 面 PAC， $\therefore AB\perp AC$ 以 A 为原点，AB 为 x 轴，AC 为 y 轴，AP 为 z 轴建立坐标系则



$A(0,0,0), P(0,0,2), B(\sqrt{2},0,0), C(0,\sqrt{2},0), D(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$，

$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$， $\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},0,2)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x_0,y_0,z_0)$，

$\because \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x_0+\sqrt{2}y_0=0\\ -\sqrt{2}x_0+2z_0=0\end{cases}$， 令 $z_0=1$， 则 $x_0=y_0=\sqrt{2}$， $\therefore \vec{n}=(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$，

A 到面 PBC 距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

（2）由（1）可知：$\overrightarrow{CP}=(0,-\sqrt{2},2)$，$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{2},0,0)$， $\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$， $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，

设平面 PCD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\because \begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CP}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}y_1+2z_1=0\\ -\sqrt{2}x_1=0\end{cases}$， $\therefore x_1=0$， 令 $z_1=1$， 则 $y_1=\sqrt{2}$, $\therefore \overrightarrow{n_1}=(0,\sqrt{2},1)$，

设面 PAD 的法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\because \begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AD}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}y_2=0\\ 2z_2=0\end{cases}$ $\therefore z_2=0$ 令 $x_2=1$， 则 $y_2=\sqrt{2}$， $\therefore \overrightarrow{n_2}=(1,1,0)$，

$\because \cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore$ 二面角 $C-PD-A$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

20. （1）依题意，得 $(0.005+0.010+0.020+0.030+a+0.010)\times 10=1$，解得 $a=0.025$，

则不低于 70 分的人数为 $200\times(0.030+0.025+0.010)\times 10=130$，

成绩在 $[90,100]$ 内的，即优秀的人数为 $200\times 0.010\times 10=20$；

故这名学生成绩是优秀的概率为 $\dfrac{2}{13}$；

（2）成绩在 $[70,80]$ 内的有 $200\times 0.030\times 10=60$（人）；

成绩在$[80,90]$内的有$200\times0.025\times10=50$（人）；成绩在$[90,100]$内的有20人；

故采用分层抽样抽取的13名学生中，成绩在$[70,80)$内的有6人，在$[80,90)$内的有5人，

在$[90,100]$内的有2人，

所以由题可知，X的可能取值为0，1，2，

则$P(X=0)=\dfrac{C_{11}^3}{C_{13}^3}=\dfrac{15}{26}$，$P(X=1)=\dfrac{C_{11}^2\cdot C_2^1}{C_{13}^3}=\dfrac{10}{26}=\dfrac{5}{13}$，$P(X=2)=\dfrac{C_{11}^1\cdot C_2^2}{C_{13}^3}=\dfrac{1}{26}$，

所以X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{15}{26}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{1}{26}$

故

$$E(X)=0\times\frac{15}{26}+1\times\frac{5}{13}+2\times\frac{1}{26}=\frac{6}{13}$$

21.（1）由已知可得$Q(-3,-1)$，$F(c,0)$.

则$\overrightarrow{FP}=(3-c,1)$，$\overrightarrow{FQ}=(-3-c,-1)$，

由$\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FQ}=6$可得，$c^2=16$，所以$a^2+b^2=16$.，

又点$P(3,1)$在双曲线上，所以$\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1$.

联立$\begin{cases}\dfrac{9}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=1\\a^2+b^2=16\end{cases}$，可得$\begin{cases}a^2=8\\b^2=8\end{cases}$，

所以，C的方程为$\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1$.

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$D(-x_2,-y_2)$，

所以$\overrightarrow{PA}=(x_1-3,y_1-1)$，$\overrightarrow{PD}=(-x_2-3,-y_2-1)$，

由$PA\perp PD$可得，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，所以$(x_1-3)(-x_2-3)+(y_1-1)(-y_2-1)=0$，

整理可得，$x_1x_2+y_1y_2+3(x_1-x_2)+y_1-y_2-10=0$.

由已知可设直线l的方程为$y=kx+m$（$k\neq0$且$k\neq\pm1$）.

联立直线 l 与双曲线的方程 $\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{8}=1 \end{cases}$ 可得，$(1-k^2)x^2-2mkx-m^2-8=0$.

$\Delta=(-2mk)^2-4(1-k^2)(-m^2-8)=4(m^2-8k^2+8)>0$，所以 $8k^2<m^2+8$.

由韦达定理可得 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2mk}{1-k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{-m^2-8}{1-k^2} \end{cases}$，又 $y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$，

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$.

所以，由 $x_1x_2+y_1y_2+3(x_1-x_2)+y_1-y_2-10=0$ 可得，

$\dfrac{-m^2-8}{1-k^2}(k^2+1)+km\cdot\dfrac{2mk}{1-k^2}+(k+3)(x_1-x_2)+m^2-10=0$，

整理可得，$(1-k^2)(k+3)(x_1-x_2)+2k^2-18=0$，

因为 $1-k^2\neq 0$，x_1-x_2 不恒为 0，所以应有 $\begin{cases} k+3=0 \\ 2k^2-18=0 \end{cases}$，解得 $k=-3$.

所以直线 l 的斜率为定值 -3

22. （1）$f'(x)=\dfrac{a}{x}+b$，

$\because f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=2x+2$，

$\therefore \begin{cases} f'(1)=\dfrac{a}{1}+b=2 \\ f(1)=a\ln 1+b+3=2+2 \end{cases}$，解得 $a=1$，$b=1$，

所以 $f(x)=\ln x+x+3$.

（2）令 $g(x)=f(x)-(2x+2)=\ln x-x+1$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)\leq g(x)_{\max}=g(1)=0$，即 $f(x)\leq 2x+2$.

若要证明 $2x\sin x+\pi>f(x)$，只需证明 $2x\sin x+\pi>2x+2$，

令 $h(x)=x-\sin x$，则 $h'(x)=1-\cos x>0$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上恒成立，

所以$h(x)=x-\sin x$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，

所以当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$h(x)>h(0)=0$，即$x>\sin x$，

所以$2x\sin x>2\sin^2 x$.

故只需证明$2\sin^2 x+\pi\geq 2x+2$.

令$F(x)=2\sin^2 x-2x+\pi-2$，

则$F'(x)=4\sin x\cos x-2=2\sin 2x-2\leq 0$，

所以$F(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递减，

所以当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时，$F(x)\geq F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\times 1^2-2\times\dfrac{\pi}{2}+\pi-2=0$，

所以$2\sin^2 x+\pi\geq 2x+2$.

综上知，$2x\sin x+\pi>2x+2\geq f(x)$