绝密★启用前

天一大联考
“皖豫联盟体”2020届高中毕业班第二次考试

理科数学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\left\{x\left|\left(\frac{1}{3}\right)^x<27\right.\right\}$，$B=\{y|y\geq -5\}$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $[-5,-3]$　　C. $[-5,-3)$　　D. $[-5,3]$

2. 若复数 $z=\frac{1+mi}{2+i}(m\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，则 $m=$

A. 2　　B. 1　　C. -1　　D. -2

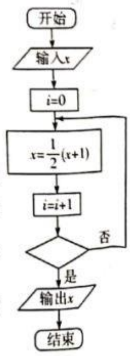
3. 2019年10月1日，为了庆祝中华人民共和国成立70周年，某校聚集400名学生站成一个方阵. 方阵中间部分学生身穿红色衣服，组成“70”的字样，其余学生身穿白色衣服. 若任选1名学生，选到身穿红色衣服的学生的概率为 $\frac{1}{4}$，则任选2名学生，1名学生身穿红色衣服，另1名学生身穿白色衣服的概率为

A. $\frac{100}{133}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{50}{133}$　　D. $\frac{3}{16}$

4. 记递增等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，前 n 项和为 S_n. 若 $S_2=8$，$S_4=80$，则

A. $a_1=4$　　B. $a_1=2$　　C. $q=2$　　D. $q=4$

5. 运行如图所示的程序框图，若输入的 x 的值为3，输出的 x 的值为 $\frac{9}{8}$，则判断框中可以填



A. $i>5$　　B. $i>4$　　C. $i>3$　　D. $i>2$

6. 地震震级是衡量地震本身大小的尺度，由地震所释放出来的能量大小来决定，释放出的能量愈大，则震级愈大. 震级的大小可通过地震仪测出. 中国使用的震级标准，是国际上通用的里氏分级表，地震释放的能量 E 与地震里氏震级 M 之间的关系为 $\frac{E}{10^{4.8}}=(\sqrt{10})^{3M}$. 已知 A 地区最近两次地震的震级 M_1，M_2 的值分别为6，5，释放的能量分别为 E_1，E_2. 记 $\lambda=\frac{E_1}{E_2}$，则 $\lambda\in$

A. $(30,31)$　　B. $(31,32)$
C. $(32,33)$　　D. $(33,34)$

7. 已知三棱锥 $A-BCD$ 满足 $AB=CD=2\sqrt{13}$，$AC=BD=10$，$AD=BC=4\sqrt{5}$，则三棱锥 $A-BCD$ 外接球的表面积为

A. 116π　　B. 128π　　C. 132π　　D. 156π

8. 将曲线 $y=3e^{x+2}$ 绕原点顺时针旋转角 θ 后第一次与 x 轴相切，则 $\tan\theta=$

A. $2e^2$　　B. $2e^3$　　C. $3e^2$　　D. $3e^3$

9. 记双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 M 在双曲线的渐近线上，且在第二象限，$|OM|=|OF_2|$（O 为坐标原点），线段 MF_2 的中点 P 满足 $|PF_1|-|PF_2|=2a$，则双曲线 C 的离心率为

A. $1+\sqrt{5}$　　B. $1+\sqrt{3}$　　C. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

10. 已知在体积为 27 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别是 A_1D_1,C_1D_1 的中点. 若平面 $BEF\cap$ 平面 $BCC_1B_1=l$，则 l 在正方形 BCC_1B_1 中的线段长度为

A. $\sqrt{10}$　　B. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$　　D. $\sqrt{13}$

11. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象的一个最高点为 $P(3,1)$，M,N 是与 P 相邻的两个最低点，且 $\tan\angle MPN=-\frac{20}{21}$，则函数 $f(x)$ 的单调递减区间为

A. $[3+10k,8+10k](k\in\mathbf{Z})$　　B. $[8+10k,13+10k](k\in\mathbf{Z})$

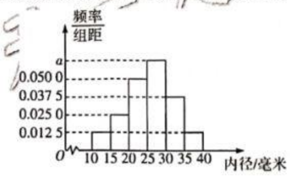
C. $[3+5k,8+5k](k\in\mathbf{Z})$　　D. $[8+5k,13+5k](k\in\mathbf{Z})$

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与 x 轴交于 P,Q 两点，与 y 轴交于 M,N 两点，点 R 在椭圆 C 上，$\angle PRQ=135°$，$\cos\angle RPQ=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，且四边形 $MPNQ$ 的面积为 $8\sqrt{6}$，则椭圆 C 的方程为

A. $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$　　C. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{18}+\frac{3y^2}{16}=1$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 对一批产品的内径进行测量，所得数据统计如下图所示，估计这批产品内径的中位数为________.



14. 已知 $\triangle ABC$ 中，D 是线段 BC 上靠近 B 的三等分点，E 是线段 AC 的中点. 若 $\overrightarrow{BE}=m\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AE}$，则 $m-n=$________.

15. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{S_{n+1}}{(S_{n+1}-1)^2}$. 若 $41S_k<39$，则 k 的最大值为________.

16. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left|\frac{2x+3}{x-1}\right|,x<0,\\ x^2-4x+3,x\geqslant 0,\end{cases}$ 函数 $g(x)=[f(x)]^2+(2m-1)f(x)-2m$，若函数 $g(x)$ 有 7 个零点，则实数 m 的取值范围为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

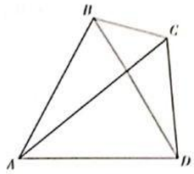
（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

如图所示，在平面四边形 $ABCD$ 中，$\tan\angle BCD=-\frac{4}{3}$.

（Ⅰ）若 $\angle ACB=\angle ACD$，$AB=2BC=2$，求 AC 的长；

（Ⅱ）若 $\angle CBD=45^{\circ}$，$BC=2$，求 $\triangle BCD$ 的面积.

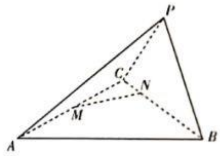


18.（12 分）

如图，三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是等边三角形，M 是线段 AC 的中点，N 是线段 CB 上靠近 C 的四等分点，平面 $PBC\perp$ 平面 ABC.

（Ⅰ）求证：$MN\perp PB$；

（Ⅱ）若 $PB=PC=BC=4$，求二面角 $A-PC-B$ 的余弦值.



19.（12 分）

由于工作需要，某公司准备一次性购买两台具有智能打印、扫描、复印等多种功能的智能激光型打印机. 针对购买后未来五年内的售后，厂家提供如下两种方案：

方案一：一次性缴纳 10 000 元，在未来五年内，可免费上门维修 5 次，超过 5 次后每次收取费用3 000元；

方案二：一次性缴纳 14 000 元，在未来五年内，可免费上门维修 7 次，超过 7 次后每次收取费用1 000元.

该公司搜集并整理了 200 台这款打印机使用五年的维修次数，所得数据如下表所示：

维修次数	1	2	3	4
台数	20	50	80	50

以这 200 台打印机使用五年的维修次数的频率代替 1 台打印机使用五年的维修次数的概率，记 X 表示这两台智能打印机五年内共需维修的次数.

（Ⅰ）求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅱ）以两种方案产生的维修费用的期望值为决策依据，写出你的选择，并说明理由.

20.（12 分）

已知抛物线 $\Gamma: y^2=4x$，A,B,C,D 四点都在抛物线 Γ 上.

（Ⅰ）若线段 AC 的斜率为 2，求线段 AC 中点的纵坐标；

（Ⅱ）记 $R(4,0)$，若直线 AC,BD 均过定点 $(2,0)$，且 $AC\perp BD$，P,Q 分别为 AC,BD 的中点，证明：P,Q,R 三点共线.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x+mx$，$g(x)=\left|\dfrac{f(x)}{xe^x}\right|$.

（Ⅰ）若 $m=-2$，求证：当 $x>1$ 时 $f(x)>-2$；

（Ⅱ）若函数 $g(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减，求实数 m 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4－4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\sqrt{3}\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以坐标原点 O 为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，且 l 与 C 交于 A,B 两点，已知点 M 的极坐标为 $(2,3\pi)$.

（Ⅰ）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程，并求 $|MA|\cdot|MB|$ 的值；

（Ⅱ）若矩形 $DEFG$ 内接于曲线 C 且四边与坐标轴平行，求其周长的最大值.

23.［选修 4－5：不等式选讲］（10 分）

已知 $a>0,b>0$.

（Ⅰ）若 $c>0$，证明：$a+4b+c^2\geqslant 2\sqrt{ab}+\sqrt{a}c+2\sqrt{b}c$；

（Ⅱ）若 $a>b$，证明：$2a+\dfrac{1+6ab-3a^2-3b^2}{a^2-2ab+b^2}\geqslant 2b$.