B卷

晋中市2023年3月普通高等学校招生模拟考试·数学参考答案

1. 选 B　因为 $z(1+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{1-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(1-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{1-3-4\mathrm{i}}{2}=-1-2\mathrm{i}$. z 的虚部为 -2.

2. 选 A　由题意可得，

$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{5}\times(80+70+80+90+90)=82$，

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}\times[(80-82)^2+(70-82)^2+(80-82)^2+(90-82)^2+(90-82)^2]=56$，

$\bar{x}_{乙}=\frac{1}{5}\times(70+80+70+80+80)=76$，

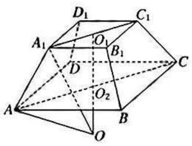
$s_{乙}^2=\frac{1}{5}\times[(70-76)^2+(80-76)^2+(70-76)^2+(80-76)^2+(80-76)^2]=24$，

因为 $\bar{x}_{甲}>\bar{x}_{乙}$ 且 $s_{甲}^2>s_{乙}^2$，故选 A.

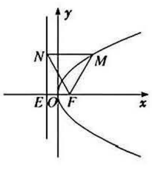
3. 选 A　由 $x^2-7x+12=0$，解得 $x=3$ 或 $x=4$，故 $A=\{3,4\}$，则 $A\cup B=\{1,3,4,5\}$，$\complement_U(A\cup B)=\{0,2\}$.

4. 选 B　由已知可得，$f(4-x)=2^{4-x}-\frac{16}{2^{4-x}}=\frac{16}{2^x}-2^x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称.

5. 选 C　设该刍童外接球的球心为 O，半径为 R，上底面中心为 O_1，下底面中心为 O_2，则由题意，$O_1O_2=1$，$AO_2=2$，$A_1O_1=1$，$OA=OA_1=R$. 如图，当 O 在 O_1O_2 的延长线上时，设 $OO_2=h$，则在 $\triangle AOO_2$ 中，$R^2=h^2+4$①，在 $\triangle A_1OO_1$ 中，$R^2=(h+1)^2+1$②，联立①②得 $h=1$，$R^2=5$，所以刍童外接球的表面积为 20π. 同理，当 O 在线段 O_1O_2 上时，设 $OO_1=h$，则有 $R^2=h^2+1$，$R^2=(1-h)^2+4$，解得 $h=2$，不满足题意，舍去. 综上所述，该刍童外接球的表面积为 20π.



6. 选 D　由题可知，$p=2$，抛物线焦点 F 为 $(1,0)$，准线 l 为 $x=-1$，设准线 l 与 x 轴的交点为 E，如图所示，由题知 $MN\perp l$，由抛物线的定义可知 $|MN|=|MF|$，因为 $|NF|=|MN|$，所以 $\triangle MNF$ 是正三角形，则对于 $\mathrm{Rt}\triangle NEF$，因为 $MN/\!/OF$，所以 $\angle EFN=\angle MNF=60°$，所以 $|MF|=|NF|=2|EF|=2p=4$.



7. 选 C　因为函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，函数 $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位长度后得到 $g(x)=2\sin\left[2(x+\varphi)+\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+2\varphi+\frac{\pi}{3}\right)$，当 $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$，则 $2\varphi-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+2\varphi+\frac{\pi}{3}\leqslant 2\varphi+\frac{2\pi}{3}$，因为 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调，由正弦函数的单调性可知，$\left[2\varphi-\frac{\pi}{6},2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$，或 $\left[2\varphi-\frac{\pi}{6},2\varphi+\frac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$. 要使 φ 最小，则 k 取 0，故有 $\begin{cases}2\varphi-\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{\pi}{2},\\2\varphi+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2\varphi-\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2},\\2\varphi+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 结合 $\varphi>0$，解得 $\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{12}$，

综上，φ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$.

8. 选 C　设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 为增函数；当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 为减函数. 所以 $f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，$a=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2=\frac{2}{4}\ln 2=\frac{1}{4}\ln 4=f(4)$，又 $b=\frac{\ln 3}{3}=f(3)$，$c=\frac{1}{\mathrm{e}}=f(\mathrm{e})$，$\mathrm{e}<3<4$，且 $f(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(4)<f(3)<f(\mathrm{e})$，所以 $a<b<c$. 故选 C.

9. 选 BCD　对于 A，因为 $BC_1/\!/AD_1$，所以异面直线 BC_1 与 AC 所成的角就是 AD_1 与 AC 所成的角. 因为 $AD_1=CD_1=AC$，所以 $\triangle AD_1C$ 为等边三角形，$\angle D_1AC=\frac{\pi}{3}$，即异面直线 BC_1 与 AC 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，故 A 错误；对于 B，易知 $V_{D\text{-}ACD_1}=V_{D_1\text{-}ACD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ADC}\cdot DD_1$. $V_{B\text{-}ACD_1}=V_{D_1\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot DD_1$，又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}$，所以 $V_{D\text{-}ACD_1}=V_{B\text{-}ACD_1}$，故 B 正确；对于 C，连接 DB_1，BD（图略）. 因为 $AC\perp$ 平面 BDD_1，$DB_1\subset$ 平面 BDD_1，所以 $AC\perp DB_1$. 同理可得 $AD_1\perp DB_1$，又 $AC\cap AD_1=A$，AC，$AD_1\subset$ 平面 ACD_1，所以 $DB_1\perp$ 平面 ACD_1，C_1D 与平面 ACD_1 所成的角 θ 为 $\angle C_1DB_1$ 的余角，$\sin\theta=\cos\angle C_1DB_1=\frac{C_1D}{B_1D}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故 C 正确；对于 D，由 C 项知 $\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$AB_1/\!/DC_1$，所以 AB_1 与平面 ACD_1 所成

角的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$,所以B_1到平面ACD_1的距离为$AB_1\cdot\sin\theta=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,故D正确.

10. 选BC　对于A,$a_1=C_{2\,023}^1\cdot a=2\,023a=-6\,069$,可得$a=-3$,故A错误;对于B,因为$(1-3x)^{2\,023}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2\,023}x^{2\,023}$,令$x=1$,则$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2\,023}=(1-3)^{2\,023}=-2^{2\,023}$,故B正确;对于C,令$x=0$,则$a_0=1$,令$x=\frac{1}{3}$,则$\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_{2\,023}}{3^{2\,023}}=\left(1-3\times\frac{1}{3}\right)^{2\,023}-a_0=-a_0=-1$,故C正确;对于D,由展开式知,$a_{2n}>0$,$a_{2n-1}<0$,故第1 012项的系数小于0,故D错误.

11. 选BCD　由题意知$f'(x)=x^2-x+1$,$\Delta=1-4=-3<0$,$f'(x)>0$恒成立,所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,没有极值点,A错误,B正确;设切点为$\left(m,\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{2}m^2+m+b\right)$,则$k=f'(m)=m^2-m+1$,切线方程为$y-\left(\frac{1}{3}m^3-\frac{1}{2}m^2+m+b\right)=(m^2-m+1)(x-m)$,代入点$(0,b)$得$-\frac{1}{3}m^3+\frac{1}{2}m^2-m=-m^3+m^2-m$,即$\frac{2}{3}m^3=\frac{1}{2}m^2$,解得$m=0$或$m=\frac{3}{4}$,所以切线方程为$y=x+b$或$y=\frac{13}{16}x+b$,C正确;易知$f''(x)=2x-1$,令$f''(x)=0$,则$x=\frac{1}{2}$.当$b=\frac{7}{12}$时,$f''\left(\frac{1}{2}\right)=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,所以点$\left(\frac{1}{2},1\right)$是$f(x)$的对称中心,所以有$f\left(\frac{1}{2}-x\right)+f\left(\frac{1}{2}+x\right)=2$,即$f(x)+f(1-x)=2$.令$S=f\left(\frac{1}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2}{2\,023}\right)+f\left(\frac{3}{2\,023}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)$,又$S=f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2\,021}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2\,020}{2\,023}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2\,023}\right)$,所以$2S=\left[f\left(\frac{1}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2\,023}\right)+f\left(\frac{2\,021}{2\,023}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2\,022}{2\,023}\right)+f\left(\frac{1}{2\,023}\right)\right]=2\,022\times2=4\,044$,所以$S=2\,022$,D正确.

12. 选AC　由椭圆的定义知,四边形MF_1NF_2的周长为$2a+2a=4a=8$,A正确;$\frac{1}{|MF_1|}+\frac{4}{|NF_1|}=\frac{1}{|MF_1|}+\frac{4}{|MF_2|}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{|MF_1|}+\frac{4}{|MF_2|}\right)(|MF_1|+|MF_2|)=\frac{1}{4}\left(1+4+\frac{|MF_2|}{|MF_1|}+\frac{4|MF_1|}{|MF_2|}\right)\geqslant\frac{9}{4}$,B错误;设$M(x_1,y_1)$,则$N(-x_1,-y_1)$,又$B(0,\sqrt{3})$,所以$k_{BM}\cdot k_{BN}=\frac{y_1-\sqrt{3}}{x_1}\cdot\frac{-y_1-\sqrt{3}}{-x_1}=\frac{y_1^2-3}{x_1^2}$.因为点$M(x_1,y_1)$在椭圆上,所以$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$,即$x_1^2=4\left(1-\frac{y_1^2}{3}\right)=\frac{4}{3}(3-y_1^2)$,所以$k_{BM}\cdot k_{BN}=\frac{y_1^2-3}{x_1^2}=-\frac{3}{4}$,C正确;设$E(t,0)(-1<t<1)$,则$\frac{|F_1E|}{|F_2E|}=\frac{t+1}{1-t}=\frac{|MF_1|}{|MF_2|}$,$|MF_1|+|MF_2|=4$,所以$|MF_1|=2(t+1)$,$|MF_2|=2(1-t)$,由焦半径公式知,$|MF_1|=2+\frac{1}{2}x_1=2(t+1)$,所以$x_1=4t$,故$M(4t,y_1)$,$E(t,0)$,$G\left(0,-\frac{1}{2}\right)$,因为三点共线,所以$\frac{y_1}{3t}=\frac{\frac{1}{2}}{t}$,解得$y_1=\frac{3}{2}$,则$\frac{16t^2}{4}+\frac{\frac{9}{4}}{3}=1$,解得$t=\pm\frac{1}{4}$,当$t=\frac{1}{4}$时,$\frac{|F_1E|}{|F_2E|}=\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}$,当$t=-\frac{1}{4}$时,$\frac{|F_1E|}{|F_2E|}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$,D错误.

13. **解析**:因为$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda+1-6=0$,解得$\lambda=5$.所以$\boldsymbol{a}=(6,-2)$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(7,1)$,所以$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

答案:$5\sqrt{2}$

14. **解析**:因为$f(x)+f(x+2)=0$,所以$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,
所以$f(x)$为周期函数,且周期为4,
所以$f(2\,023)=f(4\times505+3)=f(3)=f(-1)$.
因为$f(x)$为奇函数,
所以$f(-1)=-f(1)=-(2^1-1)=-1$.

答案:-1

15. **解析**:以BC的中点为原点,BC所在直线为x轴建立平面直角坐标系,根据对称性可令$B(-2,0)$,$C(2,0)$,$A(-2,1)$,设$D(x,y)$,则$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=x^2-4+y^2=12$,即$x^2+y^2=16$,点$D$在以原点为圆心,4为半径的圆上,设$E(8,0)$,则$DE=2CD$,所以$\frac{1}{2}AD+CD=\frac{1}{2}(AD+2CD)=\frac{1}{2}(AD+DE)\geqslant\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}\sqrt{10^2+1}=\frac{\sqrt{101}}{2}$.

答案:$\frac{\sqrt{101}}{2}$

16. **解析**:易知$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,
由题意可得,数列$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$的前$n$项和为$\frac{1}{6}n(n+1)\cdot(n+2)$,又$\because n^2+2^n=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n+2^n$,

∴数列$\{n^2+2^n\}$的前 n 项和 $S_n=2\times\frac{1\times2}{2}-1+2^1+2\times\frac{2\times3}{2}-2+2^2+\cdots+2\times\frac{n(n+1)}{2}-n+2^n$

$=2\left[\frac{1\times2}{2}+\frac{2\times3}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\right]-(1+2+\cdots+n)+(2+2^2+\cdots+2^n)=2\times\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2+2^{n+1}$.

答案：$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2+2^{n+1}$

17. **解**：(1)证明：$a_{n+1}+1=2a_n+1+1=2(a_n+1)$，

又 $a_1+1=2\neq0$，所以$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，……………………2 分

所以数列$\{a_n+1\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列.
……………………………………………………4 分

(2)由(1)知 $a_n+1=2^n$，所以 $a_n=2^n-1$，……………5 分

令 $b_n=\frac{2^n}{a_na_{n+1}}$，则 $b_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$，……………………………………7 分

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$……………………………9 分

$=\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$. ………………10 分

18. **解**：(1)$\frac{c\sin C}{\sin A}-c=\frac{b\sin B}{\sin A}-a$，由正弦定理，得$\frac{c^2}{a}-c=\frac{b^2}{a}-a$，则 $a^2+c^2-b^2=ac$，……………………2 分

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{2}$，因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，
……………………………………………………4 分

设$\triangle ABC$的外接圆半径为 R，由正弦定理知

$2R=\frac{b}{\sin B}=\frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{6}$，

所以$\triangle ABC$的外接圆半径为$\sqrt{6}$. ……………………6 分

(2)由 BD 平分$\angle ABC$，得 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}$，

则$\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times c\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times a\sin\frac{\pi}{6}$，

即 $ac=a+c$. ……………………………………8 分

在$\triangle ABC$中，由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$，

又 $b=3\sqrt{2}$，则 $a^2+c^2-ac=18$，……………………9 分

联立$\begin{cases}ac=a+c,\\a^2+c^2-ac=18,\end{cases}$可得 $a^2c^2-3ac-18=0$，

解得 $ac=6$($ac=-3$ 舍去). ……………………11 分

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ………12 分

19. **解**：(1)列联表如下：

	年龄不低于45岁的人数	年龄低于45岁的人数	合计
喜欢	22	48	70
不喜欢	18	12	30
合计	40	60	100

……………………………………………………2 分

零假设为 H_0：对"中国节日"系列节目的态度与人的年龄无关联.

$\chi^2=\frac{100\times(22\times12-48\times18)^2}{70\times30\times40\times60}=\frac{50}{7}\approx7.143$，………4 分

因为 $7.143>6.635$，所以推断 H_0 不成立，即能在犯错误的概率不超过 0.01 的前提下认为对"中国节日"系列节目的态度与人的年龄有关. ……………………6 分

(2)$[45,55)$，$[55,65)$，$[65,75)$三个年龄段的人数比为 2∶1∶1，故抽取人数依次为 4，2，2，故 X 的所有可能取值为 0，1，2，……………………………………7 分

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{5}{14}$，$P(X=1)=\frac{C_6^2C_2^1}{C_8^3}=\frac{15}{28}$，$P(X=2)=\frac{C_6^1C_2^2}{C_8^3}=\frac{3}{28}$，$X$ 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

……………………………………………………10 分

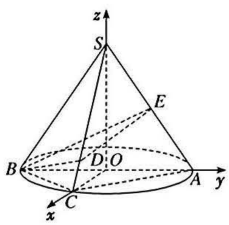
故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$.
……………………………………………………12 分

20. **解**：(1)证明：因为 $BS=AB=2$，且 E 为 AS 的中点，所以 $BE\perp SA$，……………………………………2 分

又因为平面 $BDE\perp$平面 SAB，且平面 $BDE\cap$平面 $SAB=BE$，$SA\subset$平面 SAB，

所以 $SA\perp$平面 BDE，……………………………4 分

又因为 $BD\subset$平面 BDE，所以 $SA\perp BD$. ……………6 分



(2)因为 $CA=CB$，所以 $OC\perp AB$，则 OC，OA，OS 两两垂直，

以 O 为坐标原点，OC，OA，OS 所在直线分别为 x、y、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $O(0,0,0)$，$A(0,1,0)$，$B(0,-1,0)$，$C(1,0,0)$，$S(0,0,\sqrt{3})$，……………7 分

由(1)知 $SA\perp$平面 BDE，所以$\overrightarrow{AS}=(0,-1,\sqrt{3})$是平面 BDE 的一个法向量. ……………………………8 分

设平面 SBC 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

因为$\overrightarrow{BS}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BC}=(1,1,0)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BS}=y+\sqrt{3}z=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=x+y=0,\end{cases}$

取 $x=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$，……………………10 分

因此 $\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{AS}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AS}}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{AS}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times 2}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,........11 分

所以平面 BDE 与平面 SBC 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

....12 分

21. **解**:(1)由题意可知,$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\sqrt{2},\\ \dfrac{9}{a^2}-\dfrac{5}{b^2}=1,\\ c^2=a^2+b^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=2,\\ c=2\sqrt{2},\end{cases}$ ....2 分

故双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$. ....3 分

(2)证明:**法一**:①当 $m\neq 0$ 时,由题意可知,$k_{PA}=\dfrac{m}{3}$,$k_{BQ}=-m=-3k_{PA}$,

∵点 P 在双曲线 C 上,∴$k_{PB}\cdot k_{PA}=\dfrac{b^2}{a^2}=1$,

∴$k_{PB}\cdot k_{BQ}=-3$. ....5 分

设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,$l_{PQ}:x=ny+t$,与双曲线 C 的方程联立得 $(n^2-1)y^2+2nty+t^2-4=0$,

$y_1+y_2=\dfrac{2nt}{1-n^2}$,$y_1y_2=\dfrac{t^2-4}{n^2-1}$,..............................7 分

$k_{PB}\cdot k_{BQ}=\dfrac{y_1}{x_1-2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2-2}$

$=\dfrac{y_1y_2}{n^2y_1y_2+n(t-2)(y_1+y_2)+(t-2)^2}$

$=\dfrac{t^2-4}{n^2(t^2-4)-2n^2(t-2)t+(t-2)^2(n^2-1)}$

$=\dfrac{t+2}{-(t-2)}=-3$,..............................9 分

解得 $t=4$.

∴直线 PQ 恒过点 $(4,0)$. ....10 分

②当 $m=0$ 时,P 与 B 重合,Q 与 A 重合,此时直线 PQ 的方程为 $y=0$. ....11 分

综上,直线 PQ 恒过点 $(4,0)$. ....12 分

法二:由题意可知 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,且直线 MA,MB 斜率存在.

①当 MA 与 MB 的斜率不为零时,

$l_{AM}:y=\dfrac{m}{3}(x+2)$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 交于 A,

设 $P(x_1,y_1)$,可得 $\left(1-\dfrac{m^2}{9}\right)x^2-\dfrac{4m^2}{9}x-\dfrac{4m^2}{9}-4=0$,

∴$-2\cdot x_1=\dfrac{-4(m^2+9)}{9-m^2}$,

∴$x_1=\dfrac{18+2m^2}{9-m^2}$,$y_1=\dfrac{12m}{9-m^2}$,..............................5 分

$l_{BM}:y=-m(x-2)$ 与双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 交于 B,

设 $Q(x_2,y_2)$,可得 $(1-m^2)x^2+4m^2x-4m^2-4=0$,

∴$2\cdot x_2=\dfrac{-4m^2-4}{1-m^2}$,

∴$x_2=\dfrac{-2m^2-2}{1-m^2}$,$y_2=\dfrac{4m}{1-m^2}$,..............................7 分

当 $x_1\neq x_2$ 时,直线 PQ:$y-y_2=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_2)$,

即 $y-\dfrac{4m}{1-m^2}=\dfrac{2m}{m^2-3}\left(x+\dfrac{2m^2+2}{1-m^2}\right)$,..............................8 分

令 $y=0$,解得 $x=4$,..............................9 分

当 $x_1=x_2$ 时,$\dfrac{18+2m^2}{9-m^2}=\dfrac{-2m^2-2}{1-m^2}$,

$m^2=3$,$x_1=x_2=4$,

∴直线 PQ 恒过点 $(4,0)$. ....10 分

②当 MA 与 MB 的斜率为零时,直线 PQ 的方程为 $y=0$. ....11 分

综上,直线 PQ 恒过点 $(4,0)$. ....12 分

22. **解**:(1)由题意得 $f'(x)=a(x+1)e^x-x-1=(x+1)\cdot(ae^x-1)$. ....1 分

因为 $x>0$,所以 $x+1>0$.

当 $a\leqslant 0$ 时,$ae^x-1<0$,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

当 $a>0$ 时,令 $ae^x-1=0$,则 $x=-\ln a$.

①若 $a\geqslant 1$,则 $x=-\ln a\leqslant 0$,当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

②若 $0<a<1$,则 $x=-\ln a>0$,当 $x\in(0,-\ln a)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,-\ln a)$ 上单调递减;当 $x\in(-\ln a,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增.

综上,当 $a\leqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;

当 $a\geqslant 1$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增;

当 $0<a<1$ 时,$f(x)$ 在 $(0,-\ln a)$ 上单调递减,在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增. ....4 分

(2)证明:方程 $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x^2$,即 $axe^x-\ln x-x=0$,

因为 $axe^x-(\ln x+x)=0$,则 $axe^x-\ln(xe^x)=0$,令 $t=xe^x(x>0)$,$t'=(x+1)e^x>0$,所以函数 $t=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,..............................6 分

因为方程 $axe^x-(\ln x+x)=0$ 有两个实根 x_1,x_2,令 $t_1=x_1e^{x_1}$,$t_2=x_2e^{x_2}$,则关于 t 的方程 $at-\ln t=0$ 也有两个实根 t_1,t_2,且 $t_1\neq t_2$,

要证 $x_1x_2>e^{2-x_1-x_2}$,即证 $x_1e^{x_1}\cdot x_2e^{x_2}>e^2$,即证 $t_1t_2>e^2$,即证 $\ln t_1+\ln t_2>2$,..............................8 分

由已知 $\begin{cases}at_1=\ln t_1,\\ at_2=\ln t_2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}a(t_1-t_2)=\ln t_1-\ln t_2,\\ a(t_1+t_2)=\ln t_1+\ln t_2,\end{cases}$

整理可得 $\dfrac{t_1+t_2}{t_1-t_2}=\dfrac{\ln t_1+\ln t_2}{\ln t_1-\ln t_2}$,

不妨设 $t_1>t_2>0$,即证 $\ln t_1+\ln t_2=\dfrac{t_1+t_2}{t_1-t_2}\ln\dfrac{t_1}{t_2}>2$,

即证 $\ln\dfrac{t_1}{t_2}>\dfrac{2(t_1-t_2)}{t_1+t_2}=\dfrac{2\left(\dfrac{t_1}{t_2}-1\right)}{\dfrac{t_1}{t_2}+1}$,..............................10 分

令 $s=\dfrac{t_1}{t_2}$,即证 $\ln s>\dfrac{2(s-1)}{s+1}$,其中 $s>1$,构造函数 $g(s)=\ln s-\dfrac{2(s-1)}{s+1}(s>1)$,$g'(s)=\dfrac{1}{s}-\dfrac{4}{(s+1)^2}=\dfrac{(s-1)^2}{s(s+1)^2}>0$,

所以函数 $g(s)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,当 $s>1$ 时,$g(s)>g(1)=0$,故原不等式成立. ....12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。