

## 高三数学试题参考答案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. B 2. A 3. B 4. D 5. A 6. C 7. B 8. C

二、多项选择题(共 4 小题,每小题至少 2 个以上的答案正确,错选 0 分,漏选 2 分,全对 5 分,共 20 分)

9. ABD 10. AC 11. ACD 12. BC

三、填空题(共 4 个小题,每小题 5 分,本题满分 20 分)

13. 164 14.  $\cos \frac{\pi}{2}x$  (答案不唯一) 15.  $\sqrt{5}$  16.  $\frac{3}{5}$   $\frac{\sqrt{57}}{6}$

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 解:(1)等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 > 0, d = 4$ , 其前四项  $a_1, a_1 + 4, a_1 + 8, a_1 + 12$  中删去某一项后(按原来的顺序)恰好是等比数列  $\{b_n\}$  的前三项.

根据题意,当删去数列  $\{a_n\}$  中第三项  $a_1 + 8$  时,

满足  $(a_1 + 4)^2 = a_1 \times (a_1 + 12)$ , 解得  $a_1 = 4$ ; ..... 2 分

删去  $a_1$  或  $a_1 + 4$  或  $a_1 + 12$  时,不满足题意, ..... 3 分

故  $a_1 = 4$ ; ..... 4 分

所以  $a_n = 4 + 4(n - 1) = 4n$ , ..... 5 分

(2)已知等差数列  $\{a_n\}$  中,

因为  $a_n = 4n$ ,

数列  $\{b_n\}$  中的项为: 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., ..... 6 分

所以  $a_{25} = 100$  ..... 7 分

故数列  $\{a_n\}$  的前 25 项和为  $T_{25} = 4 \times 25 + \frac{25 \times 24}{2} \times 4 = 1300$ , ..... 8 分

数列  $\{a_n\}$  的前 25 项中含有数列  $\{b_n\}$  中的项的和为  $4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 124$ , ..... 9 分

所以  $S_{20} = 1300 - 124 = 1176$ . ..... 10 分

18. 解:(1)选①  $a \sin B = b \sin(A - \frac{\pi}{3})$  得,  $\sin A \sin B = \sin B \sin(A - \frac{\pi}{3})$ , ..... 2 分

即  $\sin A = \sin(A - \frac{\pi}{3})$ , ..... 3 分

则  $A = A - \frac{\pi}{3}$  (舍) 或  $A + A - \frac{\pi}{3} = \pi$  ..... 4分

所以  $A = \frac{2\pi}{3}$  ..... 5分

选②  $(a+b)(\sin A - \sin B) = (b+c)\sin C$  得,  $(a+b)(a-b) = (b+c)c$  ..... 2分

即  $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$  ..... 3分

由  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}$ , ..... 4分

又  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $A = \frac{2\pi}{3}$  ..... 5分

选③  $\sqrt{3}b \sin \frac{B+C}{2} = a \sin B$  得,  $\sqrt{3} \sin \frac{B+C}{2} = \sin A$  ..... 2分

即  $\sqrt{3} \cos \frac{A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ , ..... 3分

因为  $\cos \frac{A}{2} \neq 0$ , 所以  $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ..... 4分

又  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $A = \frac{2\pi}{3}$  ..... 5分

(2) 由  $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABC}$  得,  $\frac{\sqrt{3}}{4}(b+c) = \frac{\sqrt{3}}{4}bc$ , ..... 6分

即  $bc = b+c = 6$  ..... 7分

由余弦定理,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = (b+c)^2 - bc = 36 - 6 = 30$  ..... 8分

解得  $a = \sqrt{30}$  ..... 9分

由正弦定理,  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = 2\sqrt{10}$ , ..... 10分

$\sin B \cdot \sin C = \frac{bc}{4R^2} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$ . ..... 11分

所以  $\sin B \sin C$  的值为  $\frac{3}{20}$  ..... 12分

19. 解: (1) 由题意可设抛物线方程为  $y^2 = 2px (p > 0)$ ,  $A(1, y)$ ,  $F(\frac{p}{2}, 0)$  ..... 2分

由  $\vec{FA} \cdot \vec{OA} = 4$ , 可得  $(1 - \frac{p}{2}, y) \cdot (1, y) = 4$ , 即  $1 - \frac{p}{2} + 2p = 4$ . 解得  $p = 2$  ..... 4分

抛物线方程为:  $y^2 = 4x$ . ..... 5分

(2) 设直线  $l: y = k(x-1) (k \neq 0)$ ,  $M(\frac{y_1^2}{4}, y_1)$ ,  $N(\frac{y_2^2}{4}, y_2)$ , 由  $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = k(x-1) \end{cases}$  联立得,

$ky^2 - 4y - 4k = 0$ . ..... 6分

则  $y_1 y_2 = -4$ . ..... 7分

直线  $OM$  的方程为  $y = \frac{4}{y_1}x$ , 与  $x = 1$  联立可得:  $A(1, \frac{4}{y_1})$ , 同理可得  $B(1, \frac{4}{y_2})$  ..... 8分

以  $AB$  为直径的圆方程为  $(x-1)^2 + (y - \frac{4}{y_1})(y - \frac{4}{y_2}) = 0$  ..... 9分

令  $y = 0$ , 则  $(x-1)^2 + \frac{16}{y_1 y_2} = 0$  ..... 10分

即  $(x-1)^2 = 4$ , 解得  $x = -1$  或  $x = 3$ . ..... 11分

即以  $AB$  为直径的圆经过  $x$  轴上的两个定点  $(-1, 0)$ ,  $(3, 0)$ . ..... 12分

20. 解: (1) 函数  $M(v) = 800(\frac{1}{2})^v + a$  为减函数, 这与  $M(10) < M(20)$  矛盾,

故选择  $M(v) = \frac{1}{40}v^3 + bv^2 + cv$ . ..... 2分

根据提供的数据, 有  $\begin{cases} \frac{1}{40} \times 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 = 1625 \\ \frac{1}{40} \times 20^3 + b \cdot 20^2 + c \cdot 20 = 3000 \end{cases}$ , ..... 3分

解得  $\begin{cases} b = -2 \\ c = 180 \end{cases}$ , ..... 4分

当  $0 \leq v < 80$  时,  $M(v) = \frac{1}{40}v^3 - 2v^2 + 180v$ . ..... 5分

(2) 国道路段长为 160km, 所用时间为  $\frac{160}{v}h$ ,

所耗电量  $f(v) = \frac{160}{v}M(v) = \frac{160}{v}(\frac{1}{40}v^3 - 2v^2 + 180v)$  ..... 7分

$= 4v^2 - 320v + 28800$   
 $= 4(v-40)^2 + 22400$ , ..... 8分

因为  $0 \leq v < 80$ , 当  $v = 40$  时,  $f(v)_{\min} = 22400Wh$ , ..... 9分

高速路段长为 100km, 所用时间为  $\frac{100}{v}h$ ,

所耗电量为  $g(v) = \frac{100}{v}N(v) = \frac{100}{v}(2v^2 - 10v + 200)$   
 $= 200 \times (v + \frac{100}{v} - 5) = 200 \times (v + \frac{100}{v}) - 1000$ , ..... 10分



因为  $g'(v) = 200(1 - \frac{100}{v^2})$ , 当  $v > 100$  时,  $g'(v) > 0$

所以  $g(v)$  在  $[80, 120]$  上单调递增,

所以  $g(v)_{\min} = g(80) = 200 \times (80 + \frac{100}{80}) - 1000 = 15250 \text{Wh}$ , ..... 11 分

故当这辆车在国道上的行驶速度为  $40 \text{km/h}$ , 在高速公路上的行驶速度为  $80 \text{km/h}$  时, 该车从 A 地到 B 地的总耗电量最少, 最少为  $22400 + 15250 = 37650 \text{Wh}$ . ..... 12 分

21. (1) 证明: 取  $QC_1$  中点 D, 连结 CD,

因为  $CC_1 \perp CQ, CC_1 = CQ = 2$ , 所以  $CD \perp C_1Q$  ..... 1 分

又面  $AQC_1 \perp$  面  $BC_1$ , 面  $AQC_1 \cap$  面  $BC_1 = QC_1$ , 所以  $CD \perp$  面  $AQC_1$  ..... 2 分

因为  $AQ \subset$  面  $AQC_1$ , 所以  $CD \perp AQ$  ..... 3 分

又因为  $AQ \perp CC_1, CC_1 \cap CD = C$ , 所以  $AQ \perp$  面  $BB_1C_1C$  ..... 4 分

(2) 解: 连结 AD, 由(1)知,  $CD \perp$  面  $AQC_1$ , 则  $\angle CAD$  是直线 AC 与平面  $AQC_1$  所成角,

$\angle CAD = 30^\circ$ ,  $\text{Rt}\triangle CAD$  中,  $CD = \sqrt{2}, AC = \frac{CD}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{2}$  ..... 5 分

又  $\text{Rt}\triangle CAQ \cong \text{Rt}\triangle BAQ, AB = AC = 2\sqrt{2}, BC = 4$ ,

得  $AB^2 + AC^2 = BC^2$ , 所以  $AB \perp AC$  ..... 6 分

以 A 为原点,  $AB, AC, AA_1$  所在直线分别为  $x, y,$

$z$  轴建立空间直角坐标系,

$A(0, 0, 0), C_1(0, 2\sqrt{2}, 2), Q(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$

$\vec{AC}_1 = (0, 2\sqrt{2}, 2), \vec{AQ} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$  ..... 7 分

设平面  $AQC_1$  得法向量为  $n = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} 2\sqrt{2}y + 2z = 0 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \end{cases} \dots\dots 8 \text{分}$$

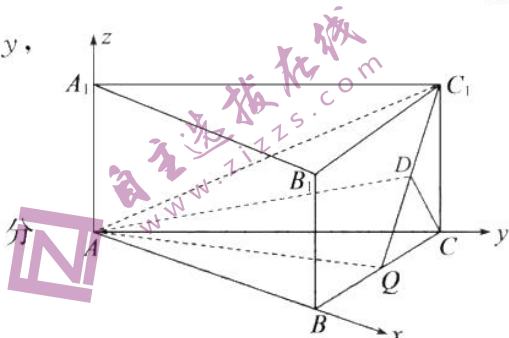
令  $y = -1$ , 则  $n = (1, -1, \sqrt{2})$  ..... 9 分

又  $AB \perp$  面  $ACC_1$ , 则  $\vec{AB} = (2\sqrt{2}, 0, 0)$  为面  $ACC_1$  的一个法向量 ..... 10 分

$$\text{设二面角 } Q-AC_1-C \text{ 大小为 } \alpha, \text{ 则 } \cos \alpha = |\cos \langle \vec{AB}, n \rangle| = \frac{|\vec{AB} \cdot n|}{|\vec{AB}| |n|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times 2} = \frac{1}{2} \dots\dots$$

..... 11 分

所以锐二面角  $Q-AC_1-C$  的大小为  $60^\circ$  ..... 12 分



22. 解: (1)  $f'(x) = \frac{ae^x(x-1)}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 (x > 0)$ , ..... 1分

$f'(2) = \frac{ae^2+2}{4} = \frac{1}{2}$ , 解得  $a=0$  ..... 2分

(2)  $f'(x) = \frac{ae^x(x-1)}{x^2} - \frac{1}{x} + 1 = \frac{(x-1)(ae^x+x)}{x^2}$ ,

令  $\varphi(x) = ae^x + x (x > 0)$

当  $a < -\frac{1}{e}$  时,  $\varphi(x) < -\frac{1}{e} \cdot e^x + x = -e^{x-1} + x$  ..... 3分

易证:  $e^x \geq x+1$ , 所以  $e^{x-1} \geq x$

所以  $\varphi(x) < -x + x = 0$ . ..... 4分

所以  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 单调递增,  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , 单调递减,

所以  $x=1$  是  $f(x)$  的唯一极值点, 所以  $f(x)$  只有一个极值点 ..... 5分

(3) 任意  $x \geq \frac{1}{e}$ ,  $f(x) = \frac{ae^x}{x} - \ln x + x \leq 1$  可转化为  $a \leq \frac{(\ln x - x + 1)x}{e^x}$  ..... 6分

令  $h(x) = \frac{(\ln x - x + 1)x}{e^x}$ ,  $h'(x) = \frac{(1-x)(\ln x - x + 2)}{e^x}$ ,

令  $\varphi(x) = \ln x - x + 2$ ,  $\varphi'(x) = \frac{1-x}{x}$ , 令  $\varphi'(x) = \frac{1-x}{x} = 0$ , 得  $x=1$ ,  $\varphi(x)$  在  $(0, 1)$  单调递增, 在  $(1, +\infty)$  单调递减, ..... 7分

且  $\varphi(1) = 1 > 0$ ,  $\varphi(e^2) = 4 - e^2 < 0$ ,  $\varphi e = 3 - e > 0$ ,  $\varphi(\frac{1}{e}) = 1 - \frac{1}{e} > 0$ , 所以  $x \geq \frac{1}{e}$  时,

$\varphi(x)$  在  $(e, e^2)$  内存在唯一零点  $x_0$ , ..... 8分

$x \in [\frac{1}{e}, 1)$  时,  $\varphi(x) > 0$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增,  $x \in (1, x_0)$  时,  $\varphi(x) > 0$ ,  $h'(x) < 0$ ,

$h(x)$  单调递减,  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $\varphi(x) < 0$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增,

所以  $h(x)_{\min} = \left\{ h(x_0), h\left(\frac{1}{e}\right) \right\}$ ,  $h\left(\frac{1}{e}\right) = -e^{-2-\frac{1}{e}}$  ..... 9分

因为  $\varphi(x_0) = \ln x_0 - x_0 + 2 = 0$ , 所以  $x_0 = e^{x_0-2}$  ..... 10分

所以  $h(x_0) = \frac{-x_0}{e^{x_0}} = -\frac{e^{x_0-2}}{e^{x_0}} = -e^{-2}$  ..... 11分

因为  $-e^{-2-\frac{1}{e}} < -e^{-2}$ , 所以  $h\left(\frac{1}{e}\right) > h(x_0)$ ,

所以  $h(x)_{\min} = h(x_0) = -e^{-2}$ , 即  $a \leq -e^{-2}$  ..... 12分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：[www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线