秘密★启封并使用完毕前【考试时间：2023 年 3 月 14 日下午 15：00-17：00】

南充市高 2023 届高考适应性考试（二诊）

文科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．复数 z 满足：$(z-i)(1+3i)=10$，则 $z=$（　　）

A．$1+2i$　　B．$1-2i$　　C．$-1+2i$　　D．$-1-2i$

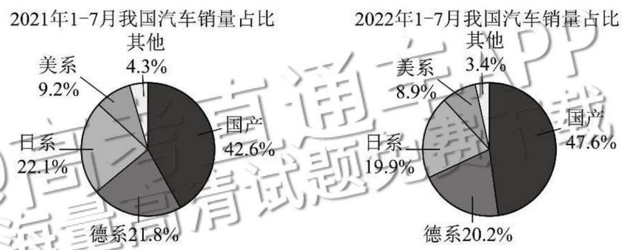
2．已知集合 $A=\{x|-4<x<2\}$，$B=\{x|x^2-x-6\leq 0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x|-4<x\leq 3\}$　　B．$\{x|-4<x\leq -2\}$　　C．$\{x|-2\leq x<2\}$　　D．$\{x|2<x\leq 3\}$

3．已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $P(-4,3)$，则 $\cos 2\alpha=$（　　）

A．$-\dfrac{24}{25}$　　B．$-\dfrac{7}{25}$　　C．$\dfrac{7}{25}$　　D．$\dfrac{24}{25}$

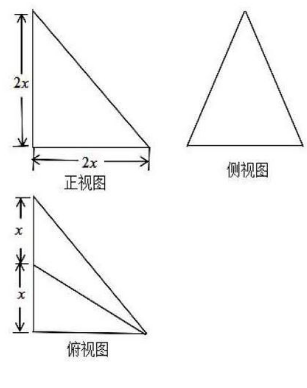
4．近年来国产品牌汽车发展迅速，特别是借助新能源汽车发展的东风，国产品牌汽车销量得到了较大的提升.如图是 2021 年 1-7 月和 2022 年 1-7 月我国汽车销量占比饼状图，已知 2022 年 1-7 月我国汽车总销量为 1254 万辆，比 2021 年增加了 99 万辆，则 2022 年 1-7 月我国汽车销量与 2021 年 1-7 月相比，下列说法正确的是（　　）



A．日系汽车销量占比变化最大　　B．德系汽车销量占比下降最大

C．美系汽车销量变少了　　D．国产汽车销量占比变大了

5．某三棱锥的三视图如图所示，已知它的体积为 $\dfrac{32}{3}$，则图中 x 的值为（　　）



A．1

B．$\sqrt[3]{2}$

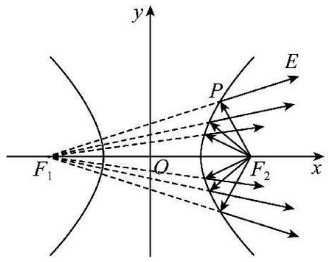
C．2

D．$2\sqrt{2}$

6．某高中准备选拔 x 名男生和 y 名女生去参加数学兴趣小组，若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}2x-y\geq 4\\2y\geq x-2\\x\leq 6\end{cases}$，则该数学兴趣小组最多可以选拔学生（　　）

A.8 人　　B.10 人　　C.12 人　　D.14 人

7. 智慧的人们在进行工业设计时，巧妙地利用了圆锥曲线的光学性质，比如电影放映机利用椭圆镜面反射出聚焦光线，探照灯利用抛物线镜面反射出平行光线．如图，从双曲线右焦点F_2发出的光线通过双曲线镜面反射，且反射光线的反向延长线经过左焦点F_1．已知入射光线F_2P斜率为$-\sqrt{3}$，且F_2P和反射光线PE互相垂直（其中P为入射点），则双曲线的离心率为（　　）



A. $1+\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $2+\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

8. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n\left(n\geq 1\right)$，则$S_{2023}$等于（　　）

A. $\dfrac{4^{2022}-1}{3}$　　B. $\dfrac{4^{2023}-1}{3}$　　C. 4^{2022}　　D. 4^{2023}

9. 在ΔABC中，a，b，c分别是角A，B，C的对边，若$b^2+c^2=2023a^2$，则$\dfrac{2\sin B\sin C}{\tan A\cdot\sin A}$的值为（　　）

A．2021　　B．2022　　C．2023　　D．2024

10. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，P是空间中任意一点，则下列说法中错误的是（　　）

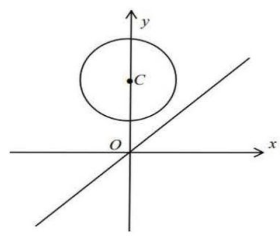
A．该正方体外接球的体积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$

B．若M是棱C_1D_1中点，则异面直线AM与CC_1夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

C．若点P在线段AD_1上运动，则始终有$C_1P\perp CB_1$

D．若点P在线段AD_1上运动，则三棱锥$D-BPC_1$体积为定值$\dfrac{1}{6}$

11. 如图，已知点P是圆$C:x^2+(y-3)^2=1$上的一个动点，点Q是直线$x-y=0$上的一个动点，O为坐标原点，则向量$\overrightarrow{OP}$在向量$\overrightarrow{OQ}$上的投影的最大值是（　　）



A. $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 3

C. $2\sqrt{2}$　　D. $1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

12. 已知函数$h(x)=(\dfrac{\ln x}{x})^2-(1-2t)\dfrac{\ln x}{x}+1-2t$有三个不同的零点$x_1$，$x_2$，$x_3$，且$x_1<x_2<x_3$．则实数$(1-\dfrac{\ln x_1}{x_1})\sqrt{(1-\dfrac{\ln x_2}{x_2})\cdot(1-\dfrac{\ln x_3}{x_3})}$的值为（　　）

A. $1-t$　　B. $t-1$　　C. -1　　D. 1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知向量 $\vec{a}=(2,1)$，$\vec{b}=(-1,2)$，则 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ 的值为_________．

14．已知直线 $y=\dfrac{3}{2}x-m$ 与曲线 $y=\dfrac{1}{2}x+\ln x$ 相切，则 m 的值为_________．

15．设 A，B 是抛物线 C：$x^2=4y$ 上的两个不同的点，O 为坐标原点，若直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-\dfrac{1}{2}$，则直线 AB 恒过定点，定点坐标为_________．

16．设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$．若 $f\left(x\right)-g\left(4-x\right)=2$，$g(x)=f(x-2)-2$，且 $f\left(x+2\right)$ 为奇函数，则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2023)=$_________．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分

17．某大学“爱牙协会”为了解“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”情况之间的关系，随机对 200 名青少年展开了调查，得知这 200 个人中共有 120 个人“有蛀牙”，其中“不爱吃甜食”且“有蛀牙”的有 30 人，“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的有 50 人.有 2×2 列联表：

	有蛀牙	无蛀牙	总计
爱吃甜食			
不爱吃甜食			
总计			

（1）根据已知条件完成如图所给的 2×2 列联表，并判断是否有 99.5%的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关；

（2）若从“无蛀牙”的青少年中用分层抽样的方法随机抽取 8 人作进一步调查，再从这抽取的 8 人中随机抽取 2 人去担任“爱牙宣传志愿者”，求抽取的 2 人都是“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年的概率．

附：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，$n=a+b+c+d$.

$P\left(K^2\geq k\right)$	0.05	0.01	0.005
k	3.841	6.635	7.879

18．已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n.从下面①②中选择其中一个作为条件解答试题，若选择不同条件分别解答，则按第一个解答计分.

①数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，$S_2=6$，且 $4a_2$，$2a_3$，a_4 成等差数列；

②数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，$a_1a_4=32$，$a_2+a_3=12$.

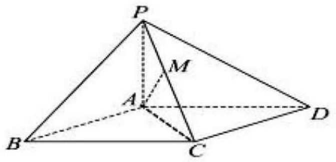
（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，且 $b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_n)\cdot(\log_2 a_{n+1})}$.证明：$T_n<1$.

19. 在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为6的菱形，$\angle ABC=60°$，$PB=PD$，$PA\perp AC$.

（1）证明：$BD\perp$平面PAC；

（2）若$PA=3$，M为棱PC上一点，满足$\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$，求点$A$到平面$MBD$的距离.

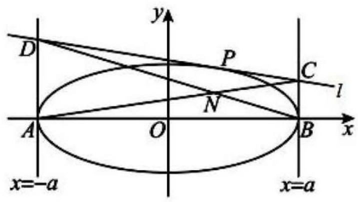


20. 如图，已知A，B分别为椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的左，右顶点，$P(x_0,y_0)$为椭圆$M$上异于点$A$，$B$的动点，若$AB=4$，且$\Delta ABP$面积的最大值为2.

(1)求椭圆M的标准方程；

(2)已知直线l与椭圆M相切于点$P(x_0,y_0)$，且l与直线$x=a$和$x=-a$分别相交于C，D两点，记四边形$ABCD$的对角线AC，BD相交于点N.

问：是否存在两个定点F_1，F_2，使得$|NF_1|+|NF_2|$为定值？若存在，求F_1，F_2的坐标；若不存在，说明理由.



21. 已知函数$f\left(x\right)=e^x-mx^2\left(m\in R,x>0\right)$，其中e为自然对数的底数.

（1）当$m=0$时，设$g(x)=\frac{f\left(x\right)}{x}$，求函数$g(x)$的极值；

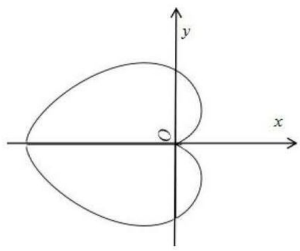
（2）若函数$h(x)=f'\left(x\right)-2n\sin x$在$(0,+\infty)$有零点，求证：$m^2+n^2>\frac{e}{4}$.

（二）、在选考题：共10分．请考生在第22、23题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22. 数学中有许多美丽的曲线，如在平面直角坐标系xOy中，曲线$E:x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$，（$a>0$）的形状如心形（如图），我们称这类曲线为笛卡尔心形曲线．以坐标原点O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，当$a=1$时．

（1）求曲线E的极坐标方程；

（2）已知P,Q为曲线E上异于O的两点，且$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求$|PQ|$的最大值.



23. 已知$m>0,n>0$，函数$f(x)=|x+m|+|x-n|+1$的最小值为3.

（1）求$m+n$的值；

（2）求证：$n+\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 4-m$.

南充市高 2023 届高考适应性考试（二诊）

文科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	B	A	C	D	C	D	A	C	B	B	D	D

二．填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡上．

13. $\underline{\sqrt{10}}$　　14. $\underline{1}$　　15. $\underline{(0,2)}$　　16. $\underline{0}$

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17—21 题必考题，每个试题考生必须作答.第 22、23 题为选考题，考试根据要求作答.

(一)必考题

17．解：(1)由题意可得列联表如下：

	有蛀牙	无蛀牙	合计
爱吃甜食	90	30	120
不爱吃甜食	30	50	80
合计	120	80	200

……………………………………………………………………………………………3 分

所以$K^2=\dfrac{200(90\times 50-30\times 30)^2}{120\times 80\times 120\times 80}$ =28.125 >7.879，……………………………………6 分

根据临界值表可知，有 99.5%的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关.

(2). 设 $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,a,b,c$ 分别代表抽取的 8 人，其中 a，b，c 代表“爱吃甜食”且”无蛀牙”的青少年，A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 “不爱吃甜食”且“无蛀牙”的青少年，从 8 人中选取 2 人的基本事件有：(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,A_5)，(A_1,a)，(A_1,b)，(A_1,c)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,A_5)，(A_2,a)，(A_2,b)，(A_2,c)，(A_3,A_4)，(A_3,A_5)，(A_3,a)，(A_3,b)，(A_3,c)，(A_4,A_5)，(A_4,a)，(A_4,b)，(A_4,c)，(A_5,a)，(A_5,b)，(A_5,c)，(a,b)，(a,c)，(b,c)共有 28 个基本事件，其中抽取的 2 人都是“不爱吃甜食”且”无蛀牙”的青少年抽取有(A_1,A_2)，(A_1,A_3)，(A_1,A_4)，(A_1,A_5)，(A_2,A_3)，(A_2,A_4)，(A_2,A_5)，(A_3,A_4)，(A_3,A_5)，(A_4,A_5)共有 10 种抽取方法，

所以抽取的 2 人都是“不爱吃甜食”且”无蛀牙”的青少年的概率

$P=\dfrac{10}{28}=\dfrac{5}{14}$．…………………………………………………………………………12 分

18.(1)解：若选①：因为数列$\{a_n\}$是等比数列，设公比为q.

$S_2=6$，且$4a_2$，$2a_3$，a_4成等差数列.

所以$\begin{cases}a_1+a_1q=6\\4a_1q+a_1q^3=4a_1q^2\end{cases}$，……………………………………………………………………2 分

解得$a_1=2,q=2$，…………………………………………………………………………………………4 分

所以$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$；……………………………………………………………………………6 分

若选②：因为数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，$a_1a_4=32$，$a_2+a_3=12$，

所以$\begin{cases}a_1a_4=a_2a_3=32\\a_2+a_3=12\end{cases}$，…………………………………………………………………………2 分

所以$a_2=4,a_3=8$，$q=\dfrac{a_3}{a_2}=2$，………………………………………………………………4 分

所以$a_n=a_2q^{n-2}=4\times2^{n-2}=2^n$；………………………………………………………………6 分

(2)证明：由（1）知$b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_n)(\log_2 a_{n+1})}=\dfrac{1}{(\log_2 2^n)(\log_2 2^{n+1})}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

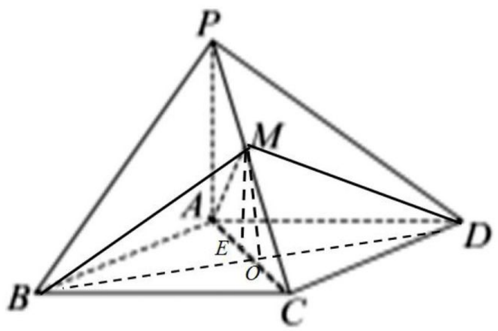
所以$T_n=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$，…………………………10 分

因为$\dfrac{1}{n+1}>0$，

所以$1-\dfrac{1}{n+1}<1$，………………………………………………………………………………11 分

即$T_n<1$…………………………………………………………………………………………………12 分

19. 解：（1）证明：连接 BD 交 AC 于 O，连接 PO.
因为底面 ABCD 是边长为 3 的菱形，所以$BD\perp AC$，
因为 O 是 BD 中点，$PB=PD$，所以$BD\perp PO$.
因为$AC\cap PO=O$，AC、$PO\subset$平面 PAC，所以$BD\perp$平面 PAC，……………………………6 分
（2）如图，连接BM,MD，连接MO.
由$BD\perp$平面 PAC，则$BD\perp PA$
因为$PA\perp AC$，所以$PA\perp$平面$ABCD$



由 ABCD 是边长为 6 的菱形，$\angle ABC=60^\circ$，$AC=6$.则$BD=6\sqrt{3}$

过M作$ME\perp AC=E$，因为$PA=3$，且$\overrightarrow{CM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CP}$，

则$ME=2,EO=1$,由$ME\perp AC=E$，故$MO=\sqrt{5}$.

则 $S_{\Delta MBD}=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times\sqrt{5}=3\sqrt{15}$ ....9 分

令点 A 到平面 MBD 的距离为 h

由 $V_{A-MBD}=V_{M-ABD}$

所以 $\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta BMD}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABD}\cdot ME$，即 $\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{15}\cdot h=\frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 2$

故 $h=\frac{6\sqrt{5}}{5}$，点 A 到平面 MBD 的距离为 $\frac{6\sqrt{5}}{5}$...12 分

20.（1）解：由题知 $\begin{cases}AB=2a=4\\ \left[S_{\Delta PAB}\right]_{\max}=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=2\end{cases}$，...2 分

得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$ ....3 分

故椭圆 M 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$...4 分

（2）方法一：因为点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，

所以 $\frac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，$(y_0\neq 0)$.

设切线 l 方程为：$y-y_0=k(x-x_0)$，即 $y=kx+y_0-kx_0$.

令 $m=y_0-kx_0$，则 $y=kx+m$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=kx+m\end{cases}$，得 $x^2+4(kx+m)^2-4=0$.

$(4k^2+1)x^2+8kmx+4(m^2-1)=0$

因为直线 l 与椭圆 M 相切，

所以 $\Delta=(8km)^2-4(4k^2+1)\cdot(4m^2-4)=0$.

所以 $4k^2+1=m^2$ ....7 分

代入 $m=y_0-kx_0$，得 $4k^2+1=(y_0-kx_0)^2$.即 $(4-{x_0}^2)k^2+2x_0y_0\cdot k+1-{y_0}^2=0$.

因为 $\frac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，所以 $4-{x_0}^2=4{y_0}^2$，$1-{y_0}^2=\frac{{x_0}^2}{4}$.

所以 $4{y_0}^2k^2+2x_0y_0\cdot k+\frac{{x_0}^2}{4}=0$，有 $(2y_0k+\frac{x_0}{2})^2=0$.

由于 $y_0\neq 0$，所以 $k=-\frac{x_0}{4y_0}$.

故切线 l 方程为：$y-y_0=-\frac{x_0}{4y_0}(x-x_0)$，即 $\frac{x_0x}{4}+y_0y=1$...9 分

令 $x=-2$ 得 $D(-2,\frac{1+\frac{x_0}{2}}{y_0})$，则直线 BD 为：$y=\frac{1+\frac{x_0}{2}}{-4y_0}(x-2)$.①

令 $x=2$，得 $C(2,\dfrac{1-\frac{x_0}{2}}{y_0})$，则直线 AC 为：$y=\dfrac{1-\frac{x_0}{2}}{4y_0}(x+2)$.②

由①×②知：$y^2=\dfrac{1-\frac{{x_0}^2}{4}}{-16{y_0}^2}(x^2-4)=\dfrac{1}{-16}(x^2-4)$

点 N 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=1$，$(y\neq 0)$．..11 分

由椭圆定义知：

存在定点 $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2},0\right)$，$F_2\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2},0\right)$，使得 $|NF_1|+|NF_2|$ 为定值 4．......................................12 分

方法二：因为点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，

则 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，即 ${y_0}^2=1-\dfrac{{x_0}^2}{4}$.

又因为 $y^2=1-\dfrac{x^2}{4}$，由于 $y\neq 0$，不妨设 $y>0$.

取 $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$，

所以 $y'=\dfrac{-x}{2\sqrt{4-x^2}}$，

所以切线的斜率 $k=\dfrac{-x_0}{2\sqrt{4-{x_0}^2}}$，

所以切线 l 方程为 $y-y_0=\dfrac{-x_0}{2\sqrt{4-{x_0}^2}}(x-x_0)$，..7 分

由 ${y_0}^2=1-\dfrac{{x_0}^2}{4}$，可得 $4-{x_0}^2=4{y_0}^2$，已知 $y_0>0$，得 $\sqrt{4-{x_0}^2}=2y_0$

所以切线 l 方程为：$y-y_0=\dfrac{-x_0}{4y_0}(x-x_0)$，即 $\dfrac{x_0x}{4}+y_0y=1$...9 分

令 $x=-2$ 得 $D(-2,\dfrac{1+\frac{x_0}{2}}{y_0})$，则直线 BD 为：$y=\dfrac{1+\frac{x_0}{2}}{-4y_0}(x-2)$.①

令 $x=2$，得 $C(2,\dfrac{1-\frac{x_0}{2}}{y_0})$，则直线 AC 为：$y=\dfrac{1-\frac{x_0}{2}}{4y_0}(x+2)$.②

由①×②知：$y^2=\dfrac{1-\frac{{x_0}^2}{4}}{-16{y_0}^2}(x^2-4)=\dfrac{1}{-16}(x^2-4)$

由对称性知：点 N 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=1$，$(y\neq 0)$．...11 分

由椭圆定义知：

存在定点$F_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{15}}{2},0\right)$，使得$|NF_1|+|NF_2|$为定值 4．..................................12 分

说明:未经证明，直接写出椭圆切线方程$\frac{x_0x}{4}+y_0y=1$，扣 4 分.

20. 解：（1）当$m=0$时，$g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

则$g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ ....2 分

当$0<x<1$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,1)$单调递减；..3 分

当$x>1$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(1,+\infty)$单调递增. ....4 分

所以$g(x)_{极小值}=g(1)=e$，无极大值...5 分

（2）方法一：$h(x)=f'(x)-2n\sin x=e^x-2mx-2n\sin x=0$在$(0,+\infty)$有零点，

得$mx+n\sin x-\frac{\mathrm{e}^x}{2}=0$，此方程可以看作$mOn$坐标平面的直线$l$的方程.

则直线l上的任意一点(m,n)到原点的距离满足不等式：

$$\sqrt{m^2+n^2}\geq\frac{e^x}{2\sqrt{x^2+\sin^2x}}$$

则$m^2+n^2\geq\frac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2x)}$ ....8 分

先证：$x^2-\sin^2x=(x+\sin x)\cdot(x-\sin x)>0$，$x\in(0,+\infty)$.

构造函数$p(x)=x+\sin x$，$x\in(0,+\infty)$.则$p'(x)=1+\cos x\geq0$.

$p(x)=x+\sin x$在$(0,+\infty)$单调递增.

$x>0$，得$p(x)=x+\sin x>p(0)=0$.

即当$x>0$时$x+\sin x>0$.

同理：构造函数$q(x)=x-\sin x$，$x\in(0,+\infty)$.则$q'(x)=1-\cos x\geq0$.

$q(x)=x+\sin x$在$(0,+\infty)$单调递增.

$x>0$，得$q(x)=x-\sin x>q(0)=0$.

即当$x>0$时$x-\sin x>0$.

所以$x^2-\sin^2x=(x+\sin x)\cdot(x-\sin x)>0$...10 分

$$m^2+n^2\geq\frac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2x)}>\frac{e^{2x}}{4(x^2+x^2)}=\frac{1}{8}\left(\frac{e^x}{x}\right)^2\geq\frac{e^2}{8}>\frac{2e}{8}=\frac{e}{4}$$

所以$m^2+n^2>\frac{e}{4}$，证毕...12 分

方法二：$h(x)=f'(x)-2n\sin x=e^x-2mx-2n\sin x=0$在$(0,+\infty)$有零点，

得$mx+n\sin x-\frac{\mathrm{e}^x}{2}=0$，则由柯西不等式知：$\frac{\mathrm{e}^x}{2}=mx+n\sin x\leq\sqrt{m^2+n^2}\cdot\sqrt{x^2+\sin^2x}$

$\sqrt{m^2+n^2} \geq \dfrac{e^x}{2\sqrt{x^2+\sin^2 x}}$ ，则

$m^2+n^2 \geq \dfrac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2 x)}$.……………………………………………………………………………8 分

先证：$x^2-\sin^2 x>0$，$x\in(0,+\infty)$.

构造函数 $h(x)=x^2-\sin^2 x$，$x\in(0,+\infty)$.则 $h'(x)=2x-2\sin x\cos x=2x-\sin 2x$.

构造函数 $k(t)=t-\sin t$，$t\in(0,+\infty)$，则 $k'(t)=1-\cos t\geq 0$.

$k(t)=t-\sin t$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

$2x>0$，得 $k(2x)>k(0)=0$.

所以函数 $h(x)=x^2-\sin^2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

当 $x>0$ 时，$x^2-\sin^2 x>0$ ……………………………………………………………………………10 分

由（1）知 $\dfrac{e^x}{x}\geq e$.

$m^2+n^2 \geq \dfrac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2 x)} > \dfrac{e^{2x}}{4(x^2+x^2)} = \dfrac{1}{8}(\dfrac{e^x}{x})^2 \geq \dfrac{e^2}{8} > \dfrac{2e}{8} = \dfrac{e}{4}$

所以 $m^2+n^2>\dfrac{e}{4}$ 　证毕.……………………………………………………………………………12 分

另：$m^2+n^2 \geq \dfrac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2 x)} > \dfrac{e^{2x}}{4(x^2+|x|\cdot|\sin x|)} > \dfrac{e^{2x}}{4(x^2+|x|)} > \dfrac{1}{4}(\dfrac{e^x}{x})\cdot\dfrac{e^x}{x+1} > \dfrac{1}{4}\cdot e\times 1 = \dfrac{e}{4}$

阅卷说明：

考生如按以下方法，请酌情给分.

①当 $x>0$ 时，$x^2-\sin^2 x>0$，得 $|x|>|\sin x|$；②当 $x>0$ 时，$e^x>x+1>1$，得 $\dfrac{e^x}{x+1}>1$.

22.解：（1）将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入曲线 E.

得 $\rho^2=\rho-\rho\cos\theta$，$\rho\geq 0$ 即 $\rho=1-\cos\theta$.

所以 E 的极坐标方程为 $\rho=1-\cos\theta$.…………………………………………………………5 分

（2）不妨设 $P(\rho_1,\theta)$，$Q\left(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，

即 $\rho_1=1-\cos\theta$，$\rho_2=1-\cos(\theta+\dfrac{\pi}{2})=1+\sin\theta$，

则 $|PQ|=\sqrt{{\rho_1}^2+{\rho_2}^2}=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta)^2}=\sqrt{3+2(\sin\theta-\cos\theta)}=\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})}$

因为 $\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})\in[-1,1]$，…………………………………………………………………8 分

所以 $|PQ|\leq\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ ……………………………………………………………9 分

当且仅当 $(\theta-\dfrac{\pi}{4})=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，即 $\theta=2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}$，$k\in Z$.

所以$|PQ|$的最大值为$\sqrt{2}+1$．……………………………………………………………………10 分

23. 解：（1）因为$f(x)=|x+m|+|(x-n)|+1\geq|(x+m)-(x-n)|+1=|m+n|+1$，

当且仅当$(x+m)\cdot(x-n)\leq 0$时，即$x\in[-m,n]$时，即等号成立.

又$m>0$，$n>0$.所以$[f(x)]_{\min}=m+n+1=3$.

故$m+n=2$……………………………………………………………………………………………5 分

（2）由（1）知$m+n=2$，又$m>0$，$n>0$，

所以$\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}=(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n})\cdot(m+n)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+2+\frac{n}{2m}+\frac{2m}{n})\geq\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{2}+2\sqrt{1})=\frac{9}{4}$.

当且仅当$\begin{cases}\frac{2m}{n}=\frac{n}{2m}\\ m+n=2\end{cases}$，即$m=\frac{2}{3}$，$n=\frac{4}{3}$时，等号成立.

因为$\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\geq\frac{9}{4}$，……………………………………………………………………8 分

所以$\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 2$.

则$m+n+\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 4$

即$n+\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 4-m$……………………………………………………10 分