

高一数学参考答案

一、单选题

1~4 C D D D

5~8 B A A B

二、多选题

9. A B C

10. B C D

11. B C

12. A C D

三、填空题

13. $1+\sqrt{3}i$

14. $20+12\sqrt{5}$

15. -1

16. $\sqrt{3}$

四、解答题

注：按照其它方法解答时，若推理过程正确、答案无误，可根据解答过程，按照步骤给出合理分值。

17、解：

(1) 选①

由 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$ ，得 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$ ，即 $|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 2 分

由 $|\vec{a}| = 1$ ，得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ 3 分

再由 $|\vec{b}| = 2$ ，即 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{7}$ 5 分

选②

由 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$ ，即 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{3}$ 2 分

由 $|\vec{a}| = 1$ ， $|\vec{b}| = 2$ ，得 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ 3 分

则 $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} = \sqrt{7}$ 5 分

(2) 若 $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ 与 $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ 共线，

则存在实数 k ，使得 $\lambda\vec{a} + \vec{b} = k(\vec{a} - \lambda\vec{b})$ 7 分

由向量 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 是两个不共线，即 $\begin{cases} \lambda = k \\ k\lambda = -1 \end{cases}$ 8 分

也即 $\lambda^2 = -1$ ，显然不存在实数 λ 10 分

18、解：

(1) 连接 OC ， OP 。

由 $\triangle PAB$ 为等边三角形， O 为 AB 的中点

故 $OP \perp AB$ ，且 $OA = 1$ ， $OP = \sqrt{3}$ 1 分

再由平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$ ，平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$ ， $OP \subset$ 平面 PAB

故 $OP \perp$ 平面 $ABCD$ 2 分

因 $OC \subset$ 平面 $ABCD$

故 $OP \perp OC$ 3 分

又因 $PC \perp DC$ ， $CD \parallel AB$

故 $PC \perp AB$ 4 分

再由 $OP \perp AB$ ， $OP \cap PC = P$

故 $AB \perp$ 平面 POC 5 分

又由 $OE \subset$ 平面 POC

故 $AB \perp OE$ 6 分

(2) 当 $OE \perp$ 平面 PCD 时， E 为 PC 中点7 分

下面证明： $OE \perp$ 平面 PCD

由 (1) 知 $AB \perp$ 平面 POC ，且 $OC \subset$ 平面 POC

故 $AB \perp OC$ ，进而可得 $OC = OP = \sqrt{3}$ ， $\angle ABC = \frac{\pi}{3}$

当 E 为 PC 中点时，可得 $OE \perp PC$

由 $CD \parallel AB$ ， $AB \perp$ 平面 POC ，且 $OE \subset$ 平面 POC

故 $OE \perp CD$ ，且 $PC \cap CD = C$

故 $OE \perp$ 平面 PCD 9 分

根据等体积法

$$\begin{aligned} V_{P-BDE} &= V_{B-PDE} = \frac{1}{2} V_{B-PCD} = \frac{1}{2} V_{P-BCD} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot PO \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{2\pi}{3} \right) \times \sqrt{3} = \frac{1}{2} \end{aligned} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

注：本题需要证明 $OE \perp$ 平面 PCD ，另外使用其它转化方法求体积，结果正确均可给分.

19、解：

方法一：

$$(1) \text{ 由 } \tan \alpha = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta}, \text{ 得 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

所以 $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \alpha$ ，即 $\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha$ 2 分

因为 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ，或 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ 4 分

解得 $\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ ，或 $\beta = \frac{\pi}{2}$ （舍去）6 分

方法二：

$$\tan \alpha = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{\beta}{2}}{1 + \tan \frac{\beta}{2}} = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2})$$
4 分

由 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ， $\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2} \in (0, \frac{\pi}{4})$ ，且函数 $y = \tan x$ 单调递增5 分

所以 $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$ ，即 $\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ 6 分

(2) 由 (1) 知，方程 $\sin \alpha + \sin \beta + m = 0$ 可化为 $\sin \alpha + \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) + m = 0$

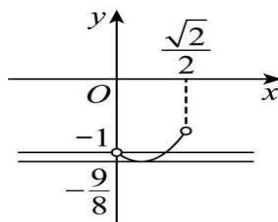
即 $\cos 2\alpha + \sin \alpha + m = 0$ ，即 $1 - 2\sin^2 \alpha + \sin \alpha + m = 0$

所以 $m = 2\sin^2 \alpha - \sin \alpha - 1$ 8 分

因为 $\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}$ ， $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4})$ ，则 $t = \sin \alpha \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 10 分

在同一坐标系中作出 $y = m$ ， $y = 2t^2 - t - 1$ 的图象

因为关于 α 的方程 $\sin \alpha + \sin \beta + m = 0$ 有两个不相等的实数根，



由图象知： $-\frac{9}{8} < m < -1$ 12 分

注：本题使用其它方法，只要结果正确也可以给分。

20、解：

(1) 由题意，设圆的半径为 R ，

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 30$ ， $AC = 10$ ， $\angle BAC = 60^\circ$

由余弦定理

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \angle BAC}$$
1 分

$$= \sqrt{30^2 + 10^2 - 2 \times 30 \times 10 \times \cos 60^\circ} = 10\sqrt{7} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{BC}{\sin \angle BAC} = 2R \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解得: } R = \frac{10}{3}\sqrt{21} \approx 15.28 \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由题意及 (1) 得

$$\text{在 Rt}\triangle CBD \text{ 中, } \angle DBC = 90^\circ, \angle DCB = 60^\circ, BC = 10\sqrt{7}$$

$$\text{故 } BD = BC \tan 60^\circ = 10\sqrt{7} \times \sqrt{3} = 10\sqrt{21} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } AB = 30, AC = 10, \angle BAC = 60^\circ$$

$$\text{由正弦定理知 } \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \sin \angle ABC = 10 \times \frac{\sin 60^\circ}{10\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, } \angle DBC = 90^\circ$$

$$\cos \angle ABD = \cos(\angle ABC + 90^\circ) = -\sin \angle ABC = -\frac{\sqrt{21}}{14} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

由余弦定理,

$$AD = \sqrt{AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cos \angle ABD} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$= \sqrt{30^2 + (10\sqrt{21})^2 - 2 \times 30 \times 10\sqrt{21} \times \left(-\frac{\sqrt{21}}{14}\right)} = 10\sqrt{39} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

由一汽车从 A 处出发, 以每小时 50 公里的速度沿公路 AD 行驶到 D 处,

$$\text{故所需时间: } t = \frac{AD}{v} = \frac{10\sqrt{39}}{50} = \frac{\sqrt{39}}{5} \approx 1.25,$$

即需要 1.25 小时 \dots\dots\dots 12 分

注: 只要能写出和题意有关且准确的正弦定理、余弦定理都可以给 1 分.

21、

(1) 证明: 连接 CE 交 AD 于 O, 再连接 OF.

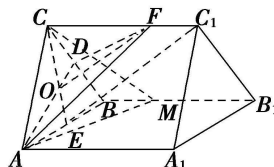
因为 CE, AD 为 $\triangle ABC$ 的中线, 则 O 为 $\triangle ABC$ 的重心 \dots\dots\dots 2 分

$$\text{即 } \frac{CF}{CC_1} = \frac{CO}{CE} = \frac{2}{3}, \text{ 故 } OF \parallel C_1E \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

又因 $OF \subset$ 平面 ADF , $C_1E \not\subset$ 平面 ADF 5 分

故 $C_1E \parallel$ 平面 ADF 6 分

注：第（1）问也可以通过面平行于面的性质定理来证明.



（2）当 $BM = 1$ 时，平面 $CAM \perp$ 平面 ADF .

证明如下：因为 $AB = AC$, D 为 BC 的中点

故 $AD \perp BC$ 7 分

又因在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中，平面 $ABC \perp$ 平面 B_1BCC_1 ,

且平面 $ABC \cap$ 平面 $B_1BCC_1 = BC$, $AD \subset$ 平面 ABC

故 $AD \perp$ 平面 B_1BCC_1 8 分

又 $CM \subset$ 平面 B_1BCC_1

故 $AD \perp CM$ 9 分

由 $BM = 1$, $BC = 2$, $CD = 1$, $FC = 2$

故 $Rt\triangle CBM \cong Rt\triangle FCD$, 易证 $DF \perp CM$ 10 分

又 $DF \cap AD = D$, $AD, DF \subset$ 平面 ADF

故 $CM \perp$ 平面 ADF 11 分

又 $CM \subset$ 平面 CAM

故平面 $CAM \perp$ 平面 ADF 12 分

注：本题第（2）问也可以通过向量法、坐标法证明 $DF \perp CM$.

22、解：

（1）

$$f(x) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \omega x \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

$$= \cos \omega x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \omega x \sin \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值，即 $\omega \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

解得 $\omega = 12k + 2 (k \in \mathbb{Z})$, 且 $\omega > 0$, 则 $\omega_{\min} = 2$ 4 分

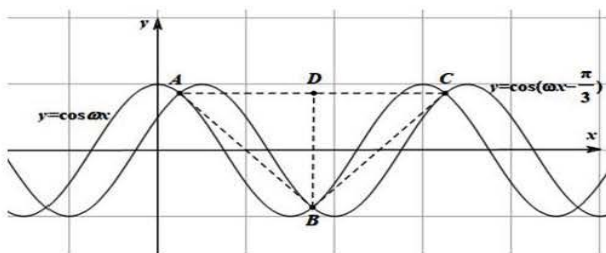
此时 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3})$ 5 分

(2)

由函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{3\omega}$ 个单位, 得到

$g(x) = f[\omega(x + \frac{\pi}{3\omega})] = \cos \omega x$ 6 分

由 (1) 知 $f(x) = \cos(\omega x - \frac{\pi}{3})$, 作出两个函数图象, 如图:



A, B, C 为连续三交点, (不妨设 B 在 x 轴下方), D 为 AC 的中点

由对称性可得 $\triangle ABC$ 是以 $\angle B$ 为顶角的等腰三角形,

根据图像可得 $AC = T = \frac{2\pi}{\omega} = 2CD$, 即 $CD = \frac{\pi}{\omega}$ 7 分

由两个图像相交可得 $\cos(\omega x - \frac{\pi}{3}) = \cos \omega x$, 得 $\cos \omega x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ 8 分

故 $y_C = -y_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 可得 $BD = \sqrt{3}$ 9 分

当 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时, 只需要 $\angle ACB > \frac{\pi}{4}$ 即可

由 $\tan \angle ACB = \frac{BD}{DC} = \frac{\sqrt{3}\omega}{\pi} > 1$ 11 分

故 ω 的取值范围为 $\omega > \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ 12 分

注: 第二问若出现其他解法, 对标上面步骤, 按照正确推理, 请恰当给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线