

2022~2023 学年度下期高二年级期末联考

文科数学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。
2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。
3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 2\}$, $B = \{x | x > \sqrt{3}\}$, 则 $A \cap B =$
A. $(-2, 2)$ B. $(-2, \sqrt{3})$ C. $(\sqrt{3}, 2)$ D. $(-2, +\infty)$
2. 已知 i 为虚数单位，则 $\frac{2}{1-i} =$
A. $-1+i$ B. $1+i$ C. $-1+2i$ D. $1+2i$
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0, \\ 2^x, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x) = 8$, 则 $x =$
A. -3 B. -2 C. 3 D. 3 或 -2
4. 已知 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 0, \\ x - y - 1 \leq 0, \\ x + y - 1 \leq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = -2x + y$ 的最小值为
A. -4 B. -2 C. -1 D. 1
5. 在区间 $[-2, 5]$ 上随机地抽取一个实数 x , 则 x 满足 $x^2 < 4$ 的概率为
A. $\frac{2}{7}$ B. $\frac{3}{7}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{5}{7}$

6. 若双曲线的渐近线方程为 $y = \pm 3x$ ，实轴长为 $2a = 2$ ，且焦点在 x 轴上，则该双曲线的标准方程为

- A. $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ 或 $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$ B. $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$
 C. $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$

7. 设 α, β 为不同的平面， m, n 为不同的直线， $n \perp \alpha, n \perp \beta$ ，则“ $m \perp \alpha$ ”是“ $m \perp \beta$ ”的

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

8. 函数 $f(x) = x + \sin x$ 在 \mathbf{R} 上是

- A. 偶函数、增函数 B. 奇函数、减函数
 C. 偶函数、减函数 D. 奇函数、增函数

9. 已知 $a = \log_{\frac{1}{2}} 3, b = e^{0.5}, c = \ln 2$ ，则

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $b > c > a$ D. $c > b > a$

10. 一次数学考试中，某班平均分为 100 分，方差为 M ，后来发现甲乙两名同学的成绩统计有误，甲同学的成绩统计为 102 分，而实际成绩应该是 107 分；乙同学的成绩统计为 110 分，而实际成绩为 105 分，现重新统计计算，得到方差为 N ，则 M 与 N 的大小关系为

- A. $M = N$ B. $M > N$ C. $M < N$ D. 不能确定

11. 在一个正三棱柱中，所有棱长都为 2，各顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为

- A. $\frac{\sqrt{21}\pi}{3}$ B. $\frac{28\pi}{3}$ C. $\frac{56\pi}{3}$ D. $\frac{7\sqrt{21}\pi}{3}$

12. 若方程 $x \ln x = a(x-1)$ 恰有一个实数根，则实数 a 的值为

- A. e B. $-e$ C. 1 D. -1

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 $a = (2-k, 3), b = (2, -6), a \parallel b$ ，则实数 $k =$ _____.

14. 曲线 $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ 所围成平面区域的面积为 _____.

15. 已知过原点的直线与曲线 $f(x) = e^x$ 相切, 则直线的斜率为_____.
16. 已知椭圆具有如下性质: 若椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 则椭圆上一点 $A(x_0, y_0)$ 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$. 试运用该性质解决以下问题: 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 点 B 为 C 在第一象限中的任意一点, 过点 B 作 C 的切线 l , l 分别与 x 轴和 y 轴的正半轴交于 M, N 两点, 则 $\triangle OMN$ 面积的最小值为_____.

三、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

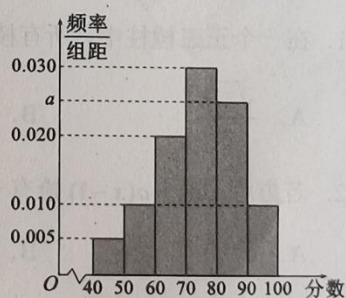
17. (12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3x$.

- (1) 若 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线与直线 $y = -4x + 1$ 平行, 求实数 a 的值;
- (2) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

18. (12 分)

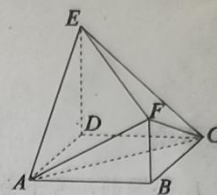
现在的高一年级学生将会是四川省首届参加新高考的学生, 高考招生计划按历史科目组合与物理科目组合分别编制. 为了了解某校高一学生的物理学习情况, 在一次全年级物理测试后随机抽取了 100 名学生的物理成绩, 将成绩分为 $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$ 共 6 组, 得到如图所示的频率分布直方图, 记分数低于 60 分为不及格.



- (1) 求直方图中 a 的值, 并估计本次物理测试的及格率;
- (2) 在样本中, 采取分层抽样的方法从成绩不及格的学生中抽取 6 名作试卷分析, 再从这 6 名学生中随机抽取 2 名做面对面交流, 求 2 名面对面交流学生的成绩均来自 $[50, 60)$ 的概率.

19. (12分)

如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $DE \perp$ 平面 $ABCD$, $DE \parallel BF$, $AD = DE = 2$, $BF = 1$.



- (1) 证明: $AC \perp EF$;
- (2) 求三棱锥 $F-AEC$ 的体积.

20. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且其中一个焦点与抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点重合.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 若直线 $l: y = kx + 2$ 与椭圆 E 交于不同的 A, B 两点, 且满足 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -1$ (O 为坐标原点), 求弦长 $|AB|$ 的值.

21. (12分)

函数 $f(x) = (x-2)e^x - ax^2 + 2ax$, $a \in \mathbb{R}$.

- (1) 当 $a = 0$ 时, 证明: $f(x) + e \geq 0$;
- (2) 若 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点, 求实数 a 的取值范围.

22. (10分)

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2}\cos\theta, \\ y = 1 + \sqrt{2}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 的倾斜角为 α , 且过点 $P(0,1)$.

- (1) 求曲线 C 的普通方程与直线 l 的参数方程;
- (2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 且 $\frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|} = \sqrt{5}$, 求直线 l 的倾斜角 α .