按秘密级事项管理 ★ 8.23 17:00 前

辽宁省十校联合体 2024 届高三毕业生八月调研考试

数 学 试 题

东北育才学校、大连市第二十四中学命制 2023.8.23

本试卷共四大题，22 小题，考试时间 120 分钟，试题满分 150 分。

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题仅有一个选项符合题意）

1. 方程 $x^2=2^x$ 的实数解为（ ▲ ）.

A. 2　　B. 4　　C. 2 或 4　　D. 以上答案都不对

2. 平面直角坐标系中 xOy 中，$A(a,b)$，$B(c,d)$，其中非负实数 a,b 和实数 c,d 满足 $a+b=20$，$c^2+d^2=21$，则$|AB|$的最大值为（ ▲ ）.

A. 20　　B. $21+\sqrt{21}$　　C. $20+\sqrt{21}$　　D. 21

3. 正四面体 $A\text{-}BCD$ 中，在侧面 ABC 内有一个动点 M，满足 M 到底面 BCD 的距离等于$|MA|$的 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 倍，则动点 M 的轨迹形状为（ ▲ ）.

A. 一段圆弧　　B. 椭圆的一部分　　C. 双曲线的一部分　　D. 抛物线的一部分

4. 已知一个棱长为 2 的正方体，点 A,C 是其内切球上两点，B,D 是其外接球上两点，连接 AB,CD，且线段 AB,CD 均不穿过内切球内部，当四面体 $A\text{-}BCD$ 的体积取得最大值时，异面直线 AD 与 BC 的夹角的余弦值为（ ▲ ）.

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{13}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$　　C. $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

5. 已知函数 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，若 $\sin^2\theta,\cos^2\theta,-\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ 是方程 $P(x)=0$ 的根，则 $P(\tan^2\theta)=$（ ▲ ）.

A. $\dfrac{4}{3}$　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　D. 1

6. 已知平面单位向量 $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ 满足 $\vec{e_1}+\vec{e_2}+\vec{e_3}=\vec{0}$，若 $0\le u\le\dfrac{1}{2}\le v\le 1$，则 $\left|u(\vec{e_1}-\vec{e_3})+v(\vec{e_2}-\vec{e_3})+\vec{e_3}\right|$ 的最小值是（ ▲ ）.

A. 1　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{8}$

7. 已知在 n 行 n 列的数阵中，第 1 行第 1 列的数为 a_0，数阵的每一列从上往下组成公差为 d_1 的等差数列，每一行从左往右组成公差为 d_2 的等差数列. 从第 n 行第 1 列的数开始，沿数阵的对角线斜向上组成新的数列，整个数阵的所有数的总和为（ ▲ ）.

A. $n[na_0+\dfrac{n(n-1)}{2}(d_1+d_2)]$　　B. $\dfrac{n}{2}[a_0+(n-1)d_1+a_0+(n-1)d_2]$

C. $a_0+(n-1)(d_1+d_2)$　　D. $n^2[a_0+\dfrac{(n-1)}{2}(d_1+d_2)]$

8. 四个村庄 A、B、C、D 之间建有四条路 AB、BC、CD、DA.在某个月的 30 天里，每逢单数日开放 AB、CD，封闭 BC、DA；每逢双数日开放 BC、DA，封闭 AB、CD。游客小明起初住在村庄 A，在该月第 k 天，他以 $\dfrac{1}{k}$ 的概率沿当天开放的道路去往相邻村庄投宿，以 $1-\dfrac{1}{k}$ 的概率留在当前村庄，设小明在 30 天内的选择相互独立，则第 30 天结束时，小明在村庄 B 的概率是（ ▲ ）.

A. $\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{1}{29}$　　C. $\dfrac{15}{58}$　　D. $\dfrac{435}{812}$

二、选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。每小题有至少一个选项符合题意，全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分）

9. 对于变量 x 和变量 y，通过随机抽样获得 10 个样本数据（x，y）（i=1，2，3，…，10），变量 x 和变量 y 具有较强的线性相关并利用最小二乘法获得回归方程为 $y=-2x+a$，且样本中心点为（6，9.3），则下列说法正确的是（ ▲ ）.

A. 变量 x 和变量 y 呈正相关.

B. 变量 x 和变量 y 的相关系数 $r<0$.

C. $a=21.3$.

D. 样本数据（5,12）比（7,5）的残差绝对值大.

10. 设复数 z_1，z_2，z_3,且 $z_1z_2\neq 0$,其中 z_1 为确定的复数.下列说法正确的是（ ▲ ）.

A. 若 $z_1z_2=|z_1|^2$，则 z_1+z_2 是实数

B. 若 $z_1z_2=|z_1|^2$，则存在唯一实数对(a,b)使得 $z_3=az_1+bz_2$

C. 若 $z_1\overline{z_3}+\left|z_3\overline{z_1}\right|=0$ ，则 z_3 在复平面内对应的点的轨迹是射线

D. 若$|z_2|+|z_3|<1$，则$\left|\dfrac{z_2-z_3}{1-z_2z_3}\right|<1$

11. 平面直角坐标系中 xOy 中，已知抛物线$\Gamma: y^2=2px(p>0)$，焦点为 F，准线为 l，顶点为 A。则下列说法正确的有：（ ▲ ）.

A. 抛物线上两点 P、G 与顶点 A 为正三角形三顶点，PG 与 Γ 的对称轴交于 N，则 $AN=6p$.

B. 过 Γ 上两点 Q、Q'的切线交于 T，作 $TK\perp l$，直线 QQ'与与 Γ 的对称轴交于 N'，则 $TK=2FN'$.

C. 过 Γ 焦点 F 作三条弦 XX',YY',ZZ'，则 $\dfrac{S_{\triangle XYZ}}{S_{\triangle X'Y'Z'}}=\left|\dfrac{y_Xy_Yy_Z}{y_{X'}y_{Y'}y_{Z'}}\right|$.

D. 任意作一条直线 l' 与抛物线相交于 R,R'（设 R 在 R'上方），在直线 l' 取两点 T,T' 使得 $RR'=TT'$（设 T 在 R 上方，T'在 R'下方），分别过 T,T' 作 Γ 的切线，切点为 S,S'，直线 SS'和 RR'交于 M，则 M 为 RR'中点.

12. 若平面与一个球只有一个交点，则称该平面为球的切平面．过球面上一点恒能作出唯一的切平面，且该点处的半径与切平面垂直．已知在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，球 O 的半径为 1．记平面 xOy，平面 zOx，平面 yOz 分别为α，β，γ．过球面上一点 $P_0(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 作切平面π_0，且π_0与α的交线为 l_0，下列说法正确的是（ ▲ ）.

A. l_0的一个方向向量为 $(\sqrt{2},-1,0)$.

B. l_0的方程为 $x+\sqrt{2}y+\sqrt{6}=0$.

C. 过 z 正半轴上一点 $N(0,0,h)$ 作与原点距离为 1 的直线 l'，设$\Gamma=\{M\mid M=l'\cap\alpha\}$，若$\Gamma\cap l_0=\varnothing$，则 h 的取值范围为$(\sqrt{2},+\infty)$.

D. 过球面上任意一点 $P(x,y,z)$作切平面 π，记 $p=\pi\cap\alpha$，$m=\pi\cap\beta$，$n=\pi\cap\gamma$，dp，dm，dn 分别为 l，m，n 到原点的距离，则 $dp\cdot dm\cdot dn\geq\dfrac{27}{8}$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请将答案填在答题卡上）

13. 定义在$[1,2021]$上的函数$f(x)$满足$f(1)=f(2021)$且对于任意$x,y\in[1,2021]$，均有$|f(x)-f(y)|\leqq 2|x-y|$，若对于所有满足上述条件的函数$f(x)$，均存在实数m，使得对于任意$x,y\in[1,2021]$，总有$|f(x)-f(y)|\leqslant m$，则实数m的最小值为__▲__。

14. 在$\triangle ABC$中，已知$\sin A=\cos B=\tan C$，边a,b满足$b>ka$，则k的最大值是__▲__。（此空结果保留两位小数）

15. 四面体$A\text{-}BCD$的体积是V，$AB=a$，$AC=b$，$AD=c$，$CD=p$，$DB=q$，$BC=r$，则其外接球半径R为__▲__。

16. 某 34 人班级派 5 人参观展览，班级里有 11 人喜欢唱，4 人喜欢跳，5 人喜欢 *rap*，14 人喜欢篮球，每个人只喜欢一种。5 人站一队参观，但是当队伍中第$k,k+1,k+2,k+3$个人分别喜欢唱、跳、*rap*、篮球时，上述 4 人会讨论蔡徐坤，展览馆不希望有人讨论蔡徐坤。当且仅当两个队伍中至少有一个位置上的人的喜好不同，两个队伍才被认为是不同的，则满足上述条件的不同的排队方案数为__▲__。

四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（10 分）

已知H为锐角$\triangle ABC$的垂心，AD、BE、CF为三角形的三条高线，且满足$9HD\cdot HE\cdot HF=HA\cdot HB\cdot HC$.

（1）求$\cos A\cos B\cos C$的值.

（2）求$\cos\angle CAB\cdot\cos\angle CBA$的取值范围.

18.（12 分）

直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=AA_1$,点M,N满足$AM=\lambda AB_1,CN=\mu CA_1$且$MN\perp AB_1,MN\perp A_1C$.设$\angle BAC=\theta\ (0<\theta<\pi)$.

（1）证明：$\lambda+\mu=1$；

（2）当θ变化时，是否存在$MN\perp BC_1$？若存在，求θ；若不存在，说明理由.

19.（12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_n = a_{n-1} + \frac{a^2_{n-1}}{a_{n-2}}(n \geq 3)$，且$a_1 = a_2 = 1$

（1） 求数列$\{a_n\}$的通项公式。

（2） 设$f(x) = 1 - e^{-x}(1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n)(x \geq 0, n \in N^*)$，其中 e 是自然对数的底数，求证：$0 \leq f(x) < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

（3） 设S_n为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，实际上，数列$\{S_n\}$存在“极限”，即为：存在一个确定的实数S，使得对任意正实数u都存在正整数m满足当$n \geqslant m$时，$|S_n - S| < u$（可以证明S唯一），S称为数列$\{S_n\}$的极限。试根据以上叙述求出数列的极限 S。

20.（12 分）

某单位有 12000 名职工，通过抽验筛查一种疾病的患者．假设患疾病的人在当地人群中的比例为 p（$0 < p < 1$）．专家建议随机地按 k（$k > 1$ 且为 12000 的正因数）人一组分组，然后将各组 k 个人的血样混合再化验. 如果混管血样呈阴性，说明这 k 个人全部阴性；如果混管血样呈阳性，说明其中至少有一人的血样呈阳性，就需要对每个人再分别化验一次. 设该种方法需要化验的总次数为 X.

（1） 当 E（X）≥ 12000 时，求 p 的取值范围并解释其实际意义；

（2） 现对混管血样逐一化验，至化验出阳性样本时停止，最多化验 R 次. 记 W 为混管的化验次数，当 R 足够大时，证明：$E(W) < \frac{1}{1-(1-p)^k}$ ；

（3） 根据经验预测本次检测时个人患病的概率 p_0，当 $k = 6$ 时，按照 p_0 计算得混管数量 Y 的期望 E（Y）$= 400$；某次检验中 $Y_0 = 440$，试判断个人患病的概率为 p_0 是否合理。[如果 $2P$（$Y \geq Y_0$）< 0.05，则说明假设不合理].

附：若 $X \sim N$（μ，σ^2），则 P（$|X-\mu| < \sigma$）≈ 0.6827， P（$|X-\mu| < 2\sigma$）≈ 0.9545，P（$|X-\mu| < 3\sigma$）≈ 0.9973.

21.（12分）

已知$b>0$，曲线$C_1: x^2=4y$，过点$M(0,b)$的曲线C_1的所有弦中，最大弦长为8.

（1）求b的值；

（2）过点M的直线与曲线C_1交于A、B两点，曲线C_1在A、B两点处的两条切线交于点P，求点P的轨迹C_2；

（3）在（2）的条件下，N是平面内的动点，动点Q是C_2上与N距离最近的点，满足$|NQ|=|NM|$的动点N的轨迹为C_3；并判断是否存在过M的直线l，使得l与C_1、l与C_3的四个交点的横坐标成等差数列，说明理由。

22.（12分）

设方程$(x-2)^2e^x=a$有三个实数根$x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$.

(1) 求a的取值范围；

(2) 请在以下两个问题中任选一个进行作答，注意选的序号不同，该题得分不同。若选①则该小问满分4分，若选②则该小问满分9分。

①证明：$(x_1-2)(x_2-2)<4$；

②证明：$x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}<\frac{3e}{2}$.