2023 年合肥六中高三最后一卷

数学·答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. D　2. C　3. C　4. A　5. C　6. B
7. D　8. D

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. BCD　10. AC　11. BCD　12. ABC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(x-3)^2+(y+3)^2=20$　14. 30

15. $\frac{27}{8}$　16. $\frac{29}{4}$或$\frac{41}{16}$

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 解析　选择条件①$4a\sin C=3c\cos A$. 公众号：全元高考

（Ⅰ）由正弦定理得，$4a\sin C=3c\cos A\Rightarrow 4\sin A\sin C=3\sin C\cos A$，

$\because \sin C\neq 0$，$\therefore 4\sin A=3\cos A$，$\therefore 16\sin^2 A=9\cos^2 A=9(1-\sin^2 A)$.

$\therefore 25\sin^2 A=9$，$\because \sin A>0$，$\therefore \sin A=\frac{3}{5}$. ………………………………（5 分）

（Ⅱ）设 $BD=CD=3x$，则易知 $AD=5x$，$AB=4x$.

$\because \sin A=\frac{3}{5}$，且 A 为锐角，$\therefore \cos A>0$，$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{4}{5}$.

在$\triangle ABC$ 中，由余弦定理得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

即 $18=(5x+3x)^2+(4x)^2-2\cdot 8x\cdot 4x\cdot\frac{4}{5}$，解得：$x=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

$\therefore c=4x=\sqrt{10}$，$b=8x=2\sqrt{10}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\frac{3}{5}=6$. ………………………………（10 分）

选择条件②$6b\cos\frac{B+C}{2}=\sqrt{10}a\sin B$.

（Ⅰ）$\because \cos\frac{B+C}{2}=\cos\frac{\pi-A}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$，$\therefore 6b\sin\frac{A}{2}=\sqrt{10}a\sin B$.

由正弦定理得：$6\sin B\sin\frac{A}{2}=\sqrt{10}\sin A\sin B$.

$\because \sin B\neq 0$，$\therefore 6\sin\frac{A}{2}=\sqrt{10}\sin A=2\sqrt{10}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

$\because A\in(0,\pi)$，$\therefore \frac{A}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \sin\frac{A}{2}\neq 0$，

$\therefore 3=\sqrt{10}\cos\frac{A}{2}$，$\therefore \cos\frac{A}{2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{10}}{10},\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\times\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{5}$. ………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）答案同选① ……………………………………………………………………………………（10 分）

18. **解析** （Ⅰ）设$\{a_n\}$的公比为 q，则 $q=\frac{a_2}{a_1}=t\neq0$，$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=t^{n-1}$.

$\therefore b_n=a_na_{n+1}=t^{n-1}\cdot t^n=t^{2n-1}$，$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{t^{2(n+1)-1}}{t^{2n-1}}=t^2$.

又 $b_1=a_1a_2=t$，$\therefore\{b_n\}$是以 t 为首项，t^2 为公比的等比数列，

当 $t=-1$ 时，$b_1=-1$，公比 $t^2=1$，所以 $T_n=-n$；

当 $t=1$ 时，$b_1=1$，公比 $t^2=1$，所以 $T_n=n$；

当 $t^2\neq1$ 时，$T_n=\frac{t[1-(t^2)^n]}{1-t^2}=\frac{t(1-t^{2n})}{1-t^2}$.

所以 $T_n=\begin{cases}-n,t=-1,\\ n,t=1,\\ \frac{t-t^{2n+1}}{1-t^2},t\neq\pm1.\end{cases}$ ……………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）观点：$\{a_n\}$不一定是等比数列.

理由：设$\{b_n\}$的公比为 q，则$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=q$，

又 $a_1=1,a_2=t$，$\therefore a_1,a_3,a_5,\cdots,a_{2n-1},\cdots$是以 1 为首项，$q$ 为公比的等比数列，

$a_2,a_4,a_6,\cdots,a_{2n},\cdots$是以 t 为首项，q 为公比的等比数列，

即$\{a_n\}$为 $1,t,q,tq,q^2,tq^2,\cdots$

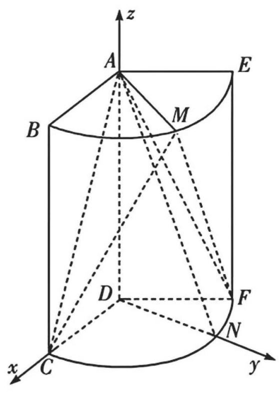
当 $q=t^2$ 时，$\{a_n\}$是等比数列；

当 $q\neq t^2$ 时，$\{a_n\}$不是等比数列. ……………………………………………………（12 分）

19. **解析** （Ⅰ）$\left.\begin{array}{l}AN\perp CD,\\ AD\perp CD,\\ AN\cap AD=A,\\ AN,AD\subset\text{平面 }AND\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}CD\perp\text{平面 }AND,\\ DN\subset\text{平面 }AND\end{array}\right\}\Rightarrow CD\perp DN.$

$\therefore \angle FDN=\angle FDC-\angle NDC=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$. ……………………………………………（6 分）

（Ⅱ）以 D 为坐标原点，分别以 DC,DN,DA 所在的直线为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系. 由题意得：$A(0,0,4)$，$C(2,0,0)$，$M(1,\sqrt{3},4)$，$F(-1,\sqrt{3},0)$，



则$\overrightarrow{AC}=(2,0,0)-(0,0,4)=(2,0,-4)$，

$\overrightarrow{AM}=(1,\sqrt{3},4)-(0,0,4)=(1,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{AF}=(-1,\sqrt{3},0)-(0,0,4)=(-1,\sqrt{3},-4)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$ 和 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$ 分别为平面 AMC 和平面 AMF 的法向量，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+\sqrt{3}y_1=0,\\ 2x_1-4z_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_1,\\ z_1=\dfrac{1}{2}x_1,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，

则 $\boldsymbol{m}=\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{2}\right)$. ……（8 分）

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2+\sqrt{3}y_2=0,\\ -x_2+\sqrt{3}y_2-4z_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_2=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x_2,\\ z_2=-\dfrac{1}{2}x_2,\end{cases}$ 取 $x_2=1$，

则 $\boldsymbol{n}=\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$. ……（10 分）

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}}{\sqrt{\dfrac{19}{12}}\cdot\sqrt{\dfrac{19}{12}}}=\dfrac{\dfrac{13}{12}}{\dfrac{19}{12}}=\dfrac{13}{19}$.

由图可知，二面角 $C-AM-F$ 的平面角为锐角，

$\therefore$ 二面角 $C-AM-F$ 的余弦值为$\dfrac{13}{19}$. ……（12 分）

20. **解析** （Ⅰ）设直线 OA,OB 的方程分别为 $y=k_1x,y=k_2x$.

过原点 O 作圆的切线 $y=kx$，则$\dfrac{|y_0-kx_0|}{\sqrt{k^2+1}}=r$，

即$(k^2+1)r^2=(y_0-kx_0)^2$，

即$(x_0^2-r^2)k^2-2x_0y_0k+y_0^2-r^2=0$，

$\therefore k_1k_2=\dfrac{y_0^2-r^2}{x_0^2-r^2}=-\dfrac{3}{4}$，

即 $3x_0^2+4y_0^2=7r^2$.

$\therefore r=\sqrt{\dfrac{3x_0^2+4y_0^2}{7}}=\sqrt{\dfrac{3x_0^2+4\left(12-\dfrac{3}{4}x_0^2\right)}{7}}=\sqrt{\dfrac{48}{7}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{7}$. ……（5 分）

（Ⅱ）是定值. 理由如下：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

$\because k_1k_2=-\dfrac{3}{4}$，$\therefore\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\dfrac{3}{4}$，

即 $16y_1^2y_2^2=9x_1^2x_2^2$. ①

$\because A,B$ 在椭圆 Γ 上，$\therefore\dfrac{x_1^2}{16}+\dfrac{y_1^2}{12}=1,\dfrac{x_2^2}{16}+\dfrac{y_2^2}{12}=1$，

$\therefore y_1^2=12\left(1-\dfrac{x_1^2}{16}\right),y_2^2=12\left(1-\dfrac{x_2^2}{16}\right)$，

代入①式，得 $16\times12\left(1-\frac{x_1^2}{16}\right)\times12\left(1-\frac{x_2^2}{16}\right)=9x_1^2x_2^2$.

化简得：$x_1^2+x_2^2=16$.

$\therefore |OA|^2+|OB|^2=(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)$

$=(x_1^2+x_2^2)+(y_1^2+y_2^2)$

$=(x_1^2+x_2^2)+12+12-\frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2)$

$=\frac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)+24$

$=\frac{1}{4}\times16+24$

$=28$,

$\therefore |OA|^2+|OB|^2=28$. ……………………………………………………………………………………（12 分）

21. **解析** （Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. $f'(x)=\frac{1}{x}+2a=\frac{2ax+1}{x}$,

若 $a\geqslant0$，则有 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 为增函数，没有最大值.

若 $a<0$，当 $x\in\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减.

$\therefore f(x)$ 的最大值为 $f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)+2a\cdot\left(-\frac{1}{2a}\right)+1=0$，即 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)=0$,

解得 $a=-\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）由 $f(x)\leqslant g(x)$，得 $\ln x+2ax+1\leqslant x(e^x+1)$,

化简得 $(2a-1)x\leqslant xe^x-\ln x-1$， 公众号：全元高考

$\therefore$ 对任意正数 x，都有 $2a-1\leqslant e^x-\frac{\ln x+1}{x}$ 恒成立.

设 $h(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}$，则 $h'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$.

令 $\varphi(x)=x^2e^x+\ln x$，则 $\varphi'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}>0$，可得 $\varphi(x)$ 为增函数.

$\because \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{e}}{4}-\ln2<0$，$\varphi(1)=e>0$，（此处利用极限判断零点存在也可）

$\therefore$ 存在 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $\varphi(x_0)=x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$.（※）

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

$\therefore h(x)$ 的最小值 $h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0}-\frac{\ln x_0+1}{x_0}$.

由（※）可知，$x_0e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}$，两边取对数，得 $\ln x_0+x_0=\ln(-\ln x_0)+(-\ln x_0)$,

令 $F(x)=x+\ln x$，显然 $F(x)$ 为增函数，由 $F(x_0)=F(-\ln x_0)$ 得 $x_0=-\ln x_0$,

$\therefore e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

$\therefore h(x)_{\min}=h(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{-x_0+1}{x_0}=1$.

$\therefore 2a-1\leqslant 1$，即 $a\leqslant 1$.

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ……………………………………………………………………（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）设计算机 4 次生成的数字之和为 ξ，则 $\xi\sim B\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$，

$P(\xi<3)=C_4^0\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+C_4^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+C_4^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{11}{16}$，

$P(\xi\geqslant 3)=1-P(\xi<3)=\dfrac{5}{16}$. ……………………………………………………………………（3 分）

由已知得随机变量 X 的所有可能取值为 1，2，3.

$P(X=1)=P(\xi\geqslant 3)\cdot P(\xi<3)=\dfrac{5}{16}\times\dfrac{11}{16}=\dfrac{55}{256}$；

$P(X=2)=P(\xi<3)\cdot P(\xi\geqslant 3)+P(\xi\geqslant 3)\cdot P(\xi\geqslant 3)=\dfrac{11}{16}\times\dfrac{5}{16}+\dfrac{5}{16}\times\dfrac{5}{16}=\dfrac{80}{256}$；

$P(X=3)=P(\xi<3)\cdot P(\xi<3)=\dfrac{11}{16}\times\dfrac{11}{16}=\dfrac{121}{256}$.

∴ 随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{55}{256}$	$\dfrac{80}{256}$	$\dfrac{121}{256}$

……………………………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）①设 A_{n-1} 表示事件"第 $n-1$ 天该企业产品检测选择的是智能检测"，

A_n 表示事件"第 n 天该企业产品检测选择的是智能检测"，

由全概率公式知 $p_n=P(A_n)=P(A_n|A_{n-1})P(A_{n-1})+P(A_n|\overline{A}_{n-1})P(\overline{A}_{n-1})=p_{n-1}\cdot P(\xi<3)+(1-p_{n-1})\cdot$ $P(\xi\geqslant 3)=\dfrac{11}{16}p_{n-1}+(1-p_{n-1})\dfrac{5}{16}=\dfrac{3}{8}p_{n-1}+\dfrac{5}{16}$.

$\therefore p_n=\dfrac{3}{8}p_{n-1}+\dfrac{5}{16}(n\geqslant 2)$. ……………………………………………………………（8 分）

②由①知 $p_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}\left(p_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$，$n\geqslant 2$，又 $p_1=1$，

所以数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{2}$，公比为 $\dfrac{3}{8}$ 的等比数列，

$\therefore p_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n-1}$，$p_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………（10 分）

$\because p_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{8}\right)^{n-1}+\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{2}$ 恒成立，

所以该企业具有一定的智能化管理水平，能拿到奖励资金. ……………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。