

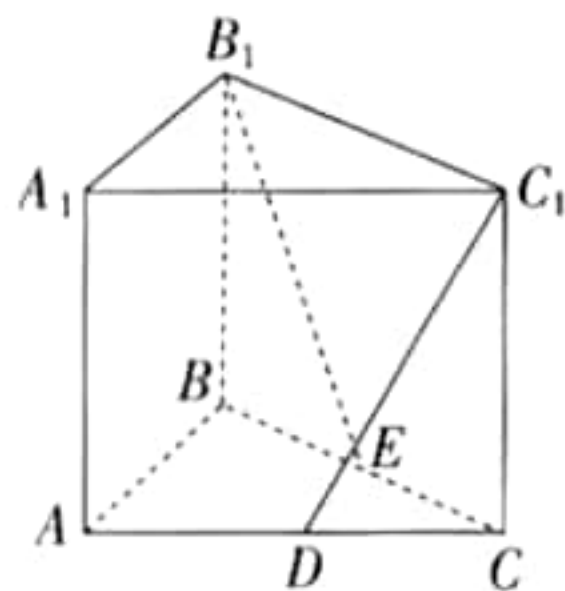
# 高三数学考试

## 注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。
4. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \mid x^2 - x - 2 \geq 0\}$ ,  $B = \{-2, -1, 0, 1\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\{-2, -1, 0\}$       B.  $\{-1, 0, 1\}$       C.  $\{-2\}$       D.  $\{-2, -1\}$
2. 已知  $z = \frac{2}{1-i} + i$ , 则  $z - \bar{z} =$   
A.  $-4i$       B.  $4i$       C.  $2$       D.  $-2$
3. 设  $a, b$  是实数, 则 “ $a > |b|$ ” 是 “ $\ln(a^2 + 1) > \ln(b^2 + 1)$ ” 的  
A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件      D. 既不充分也不必要条件
4. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{9} = 1 (a > 3)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ , 则  $a =$   
A. 5      B. 6      C. 7      D. 8
5. 已知锐角  $\alpha$  满足  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则  $\sin 2\alpha =$   
A.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{1}{3}$
6. 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB \perp BC$ ,  $AB = BC = AA_1$ ,  $D, E$  分别为  $AC, BC$  的中点, 则异面直线  $C_1D$  与  $B_1E$  所成角的余弦值为  
A.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$   
C.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$   
D.  $\frac{\sqrt{30}}{10}$



7. 在 $\triangle ABC$ 中,点 $M$ 在线段 $BC$ 上, $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$ ,则 $\lambda+\mu=$

- A.  $\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D. 1

8. 已知实数 $x, y$ 满足 $y\ln y=e^{2x}-y\ln(2x)$ ,则 $y$ 的最小值为

- A.  $\frac{1}{e}$                       B.  $e$                       C.  $\frac{1}{e^2}$                       D.  $e^2$

二、选择题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分.

9. 若甲组样本数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ (数据各不相同)的平均数为3,乙组样本数据 $2x_1+a, 2x_2+a, \dots, 2x_n+a$ 的平均数为5,下列说法错误的是

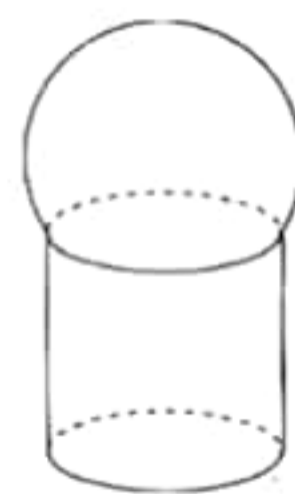
- A.  $a$ 的值不确定  
 B. 乙组样本数据的方差为甲组样本数据方差的2倍  
 C. 两组样本数据的极差可能相同  
 D. 两组样本数据的中位数可能相同

10. 早期人们为了安全传输信息,采用如下加密方法:将26个英文字母 $a, b, c, \dots, x, y, z$ 依次用整数 $0, 1, 2, \dots, 24, 25$ 代表.设某个字母用整数 $X$ 代表,则 $3X+1$ 被26除得到的余数代表的字母就是被加密后的字母,下列说法正确的是

- A. 原文 $ab$ 加密成 $be$   
 B. 密文 $be$ 的原文是 $ab$   
 C. 密文 $z$ 的原文是 $j$   
 D. 存在某个字母加密后还是原字母

11. 绿水青山就是金山银山,为响应党的号召,某小区把一处荒地改造成公园进行绿化,在绿化带旁边放置一些砌成的完全相同的石墩,石墩的上部是半径为15 cm的球的一部分,下部是底面半径为12 cm的圆柱体,整个石墩的高为48 cm,如图所示(注:球体被平面所截,截得的部分叫球缺,球缺表面上的点到截面的最大距离为球缺的高.球缺的体积 $V=\frac{1}{3}\pi(3R-h)h^2$ ,其中 $R$ 为球的半径, $h$ 为球缺的高),下列说法正确的是

- A. 石墩上、下两部分的高之比为1:1  
 B. 石墩表面上两点间距离的最大值为 $(6\sqrt{30}+15)$ cm  
 C. 每个石墩的体积为 $7488\pi$  cm<sup>3</sup>  
 D. 将石墩放置在一个球内,则该球半径的最小值为 $\frac{51}{2}$  cm



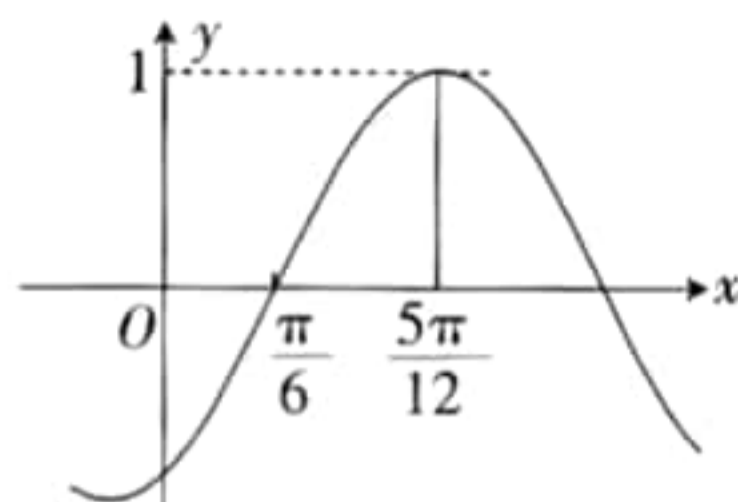
12. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ |\log_2(x-1)|, & x > 1, \end{cases}$ 若 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)$ ,且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ ,则 $\frac{4}{x_4+1}+(x_1+x_2+2)x_3$ 的值可以是

- A. 3                      B. 4                      C. 5                      D.  $\frac{16}{3}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。把答案填在答题卡中的横线上。

13. 已知过点  $P(3,3)$  作圆  $O:x^2+y^2=2$  的切线，则切线长为  $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$ 。

14. 函数  $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$  ( $A>0, \omega>0, |\varphi|<\frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图



所示，则  $f(0)=\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$ 。

15. 从 5 男 3 女共 8 名学生中选出组长 1 人，副组长 1 人，普通组员 3 人组成 5 人志愿组，要求志愿组中至少有 3 名男生，且组长和副组长性别不同，则共有  $\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$  种不同的选法。(用数字作答)

16. 已知直线  $l$  与双曲线  $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$  ( $a>0, b>0$ ) 相切于点  $P$ ，且  $l$  与  $C$  的两条渐近线  $l_1, l_2$  分

别交于  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$  两点，则  $x_1x_2+y_1y_2=\underline{\hspace{2cm} \blacktriangle \hspace{2cm}}$  (用含  $a, b$  的式子表示)。

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c, a=\sqrt{5}, a\sin A-1=\cos A$ 。

(1) 求  $\cos A$ ;

(2) 若  $b=3$ ，求  $\triangle ABC$  的面积  $S$ 。

18. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1=0$ ，且  $a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$ 。

(1) 证明： $\{\frac{1}{a_n-1}\}$  是等差数列。

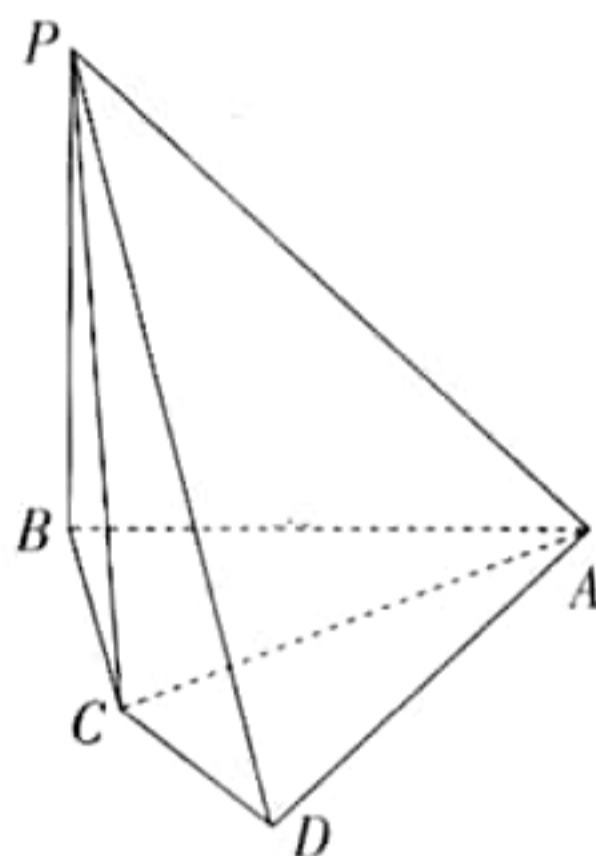
(2) 设  $b_n=\frac{1-a_n}{n+1}$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

19. (12分)

如图,在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PB \perp$  平面  $ABCD$ ,  $PB=AC=AD=2$ ,  $PA=3BC=3$ .

(1)证明:平面  $PAC \perp$  平面  $PBC$ .

(2)若  $AD \perp AB$ ,求平面  $PBC$  与平面  $PAD$  夹角的余弦值.



20. (12分)

小明玩摸球游戏,袋子里面装有形状和大小相同的红球、白球和绿球若干个,每次都是有放回地摸一个球,若首次摸到的是红球,爸爸就奖励小明2元,并规定:若连续摸到红球,则下次摸到红球的奖励是上次两倍;若某次摸到其他球,则该次无奖励,且下次奖金重置为2元.已知小明每次摸到红球的概率是  $\frac{1}{3}$ ,且每次能否摸到红球相互独立.

(1)试问至少要摸几次球,才能使摸到红球的概率不小于  $\frac{65}{81}$ ?

(2)若小明连续摸球3次,记获得的总奖金为  $X$  元,求  $E(X)$ .

21. (12分)

已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ,过  $F$  作斜率为  $k (k > 0)$  的直线  $l$  与  $C$  交于  $A, B$  两点,当  $k = \sqrt{2}$  时,  $|AB| = 6$ .

(1)求抛物线  $C$  的标准方程;

(2)设线段  $AB$  的中垂线与  $x$  轴交于点  $P$ ,抛物线  $C$  在  $A, B$  两点处的切线相交于点  $Q$ ,设

$P, Q$  两点到直线  $l$  的距离分别为  $d_1, d_2$ ,求  $\frac{d_1}{d_2}$  的值.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = a(e^x - 1) - x^2 + x$ .

(1)当  $a = 1$  时,求  $f(x)$  的图象在点  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(2)若  $a \geq 1$ ,证明:当  $x > 0$  时,  $f(x) + \cos x > 1$ .