怀仁一中高三年级第二次模拟考试·数学

参考答案、提示及评分细则

1. C　∵$B=\{-3,3\}$，∴当 $a=0$ 时，$A=\varnothing$，满足 $A\subseteq B$；当 $a\neq 0$ 时，若 $A\subseteq B$，则 $A=\{3\}$时，$a=-1$；$A=\{-3\}$时，$a=1$. ∴a 的取值集合是$\{-1,0,1\}$. 故选 C.

2. B　若 $m/\!/n$，$\alpha\cap\beta=m$，则 $n\subset\alpha$，$n/\!/\beta$ 或 $n/\!/\alpha$，$n\subset\beta$ 或 $n/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$.

3. B　∵$\sin 2\theta=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\dfrac{\sqrt5}{3}$，∴$\tan\theta=\dfrac{\sqrt5}{5}$或$\sqrt5$. ∵$\theta\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，∴$\tan\theta=\sqrt5$. 故选 B.

4. B　由向量的平行四边形法则，知当$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$时，$\angle A=90°$. 又$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=2$，故$\angle B=60°$，$\angle C=30°$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt3$，所以$\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cos 30°}{|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{3}{2}$.

5. D　由 $f(2-x)=f(x)$，得 $f(x)$的对称轴方程为 $x=1$，故$|(2-x)-1|\geqslant|(x+1)-1|$，即$(1-x)^2\geqslant x^2$，解得 $x\leqslant\dfrac{1}{2}$.

6. A　由 $a_n-a_{n+1}=a_{n+1}\cdot a_n$，得$\dfrac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}\cdot a_n}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$，所以$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项，公差 $d=1$ 的等差数列，所以$\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\times1=n$，所以 $a_n=\dfrac{1}{n}$，由 $8a_m=\dfrac{8}{m}=1$，得 $m=8$.

7. D　∵F 为 OA 中点，$|OF|=|MF|$，又$|OM|=|MF|$，所以$\triangle OMF$ 为等边三角形，$\angle OFM=60°$，记椭圆 C 的左焦点为 F_1，又$|OM|=\dfrac{1}{2}|F_1F|$，O 为 F_1F 的中点，所以$\angle F_1MF=90°$，$|MF_1|=\sqrt3|MF|$，$2a-c=\sqrt3c$，$\dfrac{c}{a}=\sqrt3-1$.

8. D　要使$\angle MBA$ 尽可能大，则 M 为 AC 靠近 C 的一个三等分点，令$|BC|=1$，且$|MC|=x|BC|=x(x>0)$.

所以 $\tan\angle MBC=x$，$\tan\angle ABC=3x$.

则 $\tan\angle MBA=\tan(\angle ABC-\angle MBC)=\dfrac{\tan\angle ABC-\tan\angle MBC}{1+\tan\angle ABC\cdot\tan\angle MBC}$，易知$\angle MBA\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

可得 $\tan\angle MBA=\dfrac{2x}{1+3x^2}(x>0)$，

$$∵\frac{2x}{1+3x^2}=\frac{2}{\frac{1}{x}+3x}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot 3x}}=\frac{\sqrt3}{3}，当且仅当\ x=\frac{\sqrt3}{3}时取等号.$$

所以$(\tan\angle MBA)_{\max}=\dfrac{\sqrt3}{3}$，又因为 $y=\tan x$ 在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以$\angle MBA$ 的最大值为$\dfrac{\pi}{6}$.

9. AD　由 $z=\dfrac{4+2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1+3\mathrm{i}$，有$|z|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$，复数 z 在复平面内所对应的点为$(1,3)$，位于第一象限，$\left(\dfrac{z-1}{3}\right)^{2023}=\mathrm{i}^{2023}=-\mathrm{i}$，故 AD 是正确的. 故选 AD.

10. AC　因为$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\frac{1}{4}\left(2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqslant 1$,

当且仅当$a=b=2$时,等号成立,即A正确;

因为$a+b=2$,所以$ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{4}=1$,当且仅当$a=b=1$时,等号成立,

所以ab的最大值为1,即B错误;

因为$(x+a)(x-1)<0$的解集为$(1,3)$,所以$a=-3$,

因为$x^2-(a+1)x+a=(x-a)(x-1)<0$,当$a=1$时,不等式的解集为$\varnothing$;当$a<1$时,不等式的解集为$(a,1)$;当$a>1$时,不等式的解集为$(1,a)$.

11. CD　由题意,对于选项A,$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位长度,可得到$\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\neq\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,所以选项A错误;对于选项B,令$f(x)=g(x)$,即$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,则化简可得$\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$,即$\sin 2x=0$,则$x=\frac{k\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,令$x_1=0$,$x_2=\frac{\pi}{2}$,交点为$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,则其距离不为$\frac{\pi}{2}$,所以选项B错误;对于选项C,$f(x)+g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 2x$,当$x=\frac{\pi}{2}$时,$\sqrt{2}\cos 2x=-\sqrt{2}$,则$x=\frac{\pi}{2}$为其一条对称轴,所以选项C正确;对于选项D,$f(x)\cdot g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos 4x$,当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时,$4x\in(\pi,2\pi)$,为单调递增区间,所以选项D正确.

12. AC　$f'(x)=-e^{-x}x(x-2)$,当$x\in(-\infty,0)$或$x\in(2,+\infty)$时,$f'(x)<0$;当$x\in(0,2)$时,$f'(x)>0$,所以$f(x)$在$(-\infty,0)$,$(2,+\infty)$上单调递减,在$(0,2)$上单调递增.故当$x=2$时,$f(x)$取得极大值.设切点为$(t,f(t))$,则l的方程为$y=f'(t)(x-t)+f(t)$,所以l在x轴上的截距为$m(t)=t-\frac{f(t)}{f'(t)}=t+\frac{t}{t-2}=t-2+\frac{2}{t-2}+3$,由题意知$t\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$,令$h(x)=x+\frac{2}{x}(x\neq 0)$,则当$x\in(0,+\infty)$时,$h(x)$的取值范围为$[2\sqrt{2},+\infty)$;当$x\in(-\infty,-2)$时,$h(x)$的取值范围是$(-\infty,-3)$.所以当$t\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$时,$m(t)$的取值范围是$(-\infty,0)\cup[2\sqrt{2}+3,+\infty)$.

13. 70　$(x-2y)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-2y)^r$.

当$r=1$时,$T_2=C_5^1 x^4(-2y)^1=-10x^4y$;当$r=2$时,$T_3=C_5^2x^3(-2y)^2=40x^3y^2$.

$\therefore\left(2+\frac{y}{x}\right)(x-2y)^5$的展开式中$x^3y^2$的系数为$-10+2\times 40=70$.

14. 53.75 kg(不带单位同样给分)　$\because(0.01+0.03)\times 5=0.2<0.5$,$0.2+0.08\times 5=0.6>0.5$,$\therefore$该地中学生的体重的中位数在$[50,55)$内,设该中位数为$m$,则$(m-50)\times 0.08+0.2=0.5$,解得$m=53.75$.

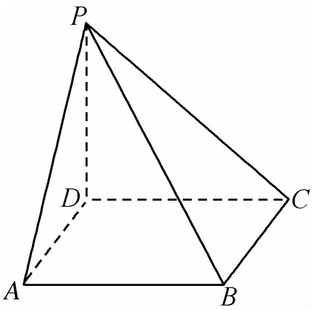
15. $\frac{4}{3}$或 4　在$\triangle ABF$中，由余弦定理可得$|AB|^2=|AF|^2+|BF|^2-2|AF|\cdot|BF|\cos\angle AFB$.

$\because\angle AFB=120^\circ$，$\therefore\frac{|AF|+|BF|}{|AB|}=\sqrt{\frac{|AF|^2+|BF|^2+2|AF|\cdot|BF|}{|AF|^2+|BF|^2+|AF|\cdot|BF|}}=\sqrt{1+\frac{1}{\frac{|AF|}{|BF|}+\frac{|BF|}{|AF|}+1}}$.

$\because\frac{|AF|}{|BF|}+\frac{|BF|}{|AF|}\geqslant 2$，$\therefore\frac{|AF|+|BF|}{|AB|}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$，当且仅当$|AF|=|BF|$时，等号成立.

根据抛物线的对称性可知，$|AF|=|BF|=2-\frac{|AF|}{2}$或$|AF|=|BF|=2+\frac{|AF|}{2}$，$\therefore|AF|=|BF|=\frac{4}{3}$或 4.

16. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$　将图形还原得四棱锥 $P-ABCD$，如图，



设六边形边长为 a，由题意，侧面展开图的面积 $S=(1+\sqrt{2})\cdot a^2=1+\sqrt{2}$.

解得 $a=1$.

设内切球的球心为 O，半径为 r，则有 $V_{P\text{-}ABCD}=V_{O\text{-}ABCD}+V_{O\text{-}PAB}+V_{O\text{-}PBC}+V_{O\text{-}PAD}+V_{O\text{-}PDC}$，即$\frac{1}{3}\times1\times S_{四边形ABCD}=\frac{1}{3}(S_{四边形ABCD}+S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAD}+S_{\triangle PDC})\cdot r$，解得$r=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17. 解：(1)由 $a\cos C=b-\frac{c\sin A}{\sqrt{3}}$及正弦定理，得 $\sin A\cos C=\sin B-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin A$，…………………… 2 分

又 $B=\pi-(A+C)$，

所以 $\sin A\cos C=\sin(A+C)-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin A$，

所以 $\cos A\sin C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin A=0$，

又 $0<C<\pi$，所以 $\sin C\neq0$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}$，…………………………………………………………………… 4 分

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$；…………………………………………………………… 5 分

(2)存在，理由如下：…………………………………………………………………… 6 分

由(1)可得 $A=\frac{\pi}{3}$，又 $a=3$，故由余弦定理，得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-3bc=9$，………… 7 分

所以$(b+c)^2-9=3bc\leqslant3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$，得 $b+c\leqslant6$，

当且仅当 $b=c=3$ 时取等号，…………………………………………………………… 9 分

所以$\triangle ABC$ 周长的最大值是 $6+3=9$. ……………………………………………… 10 分

18. (1)证明：连接 BD，

$\because E,F$ 分别是棱 AC,BC 的中点，$\therefore EF\parallel AB$，

$\because EF\subset$平面 C_1EF，$AB\not\subset$平面 C_1EF，$\therefore AB\parallel$平面 C_1EF，………………………… 2 分

∵D,F 分别是棱 B_1C_1,BC 的中点，∴$BF// C_1D,BF=C_1D$，

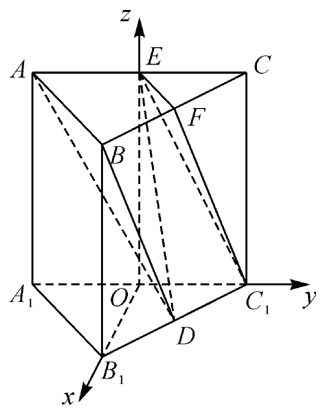
∴四边形 BDC_1F 是平行四边形，则 $BD// C_1F$，

∵$C_1F\subset$平面 C_1EF，$BD\not\subset$平面 C_1EF，∴$BD//$平面 C_1EF，………………………………………………… 4 分

∵$AB,BD\subset$平面 ABD，且 $AB\cap BD=B$，∴平面 $ABD//$平面 C_1EF，

∵$AD\subset$平面 ABD，∴$AD//$平面 C_1EF；……………………………………………………………………… 6 分

(2)解：取 A_1C_1 的中点 O，连接 OB_1,OE，易证 OB_1,OC_1,OE 两两垂直，则以 O 为原点，分别以$\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OC_1},\overrightarrow{OE}$的方向为 x,y,z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $AB=4$，则 $A(0,-2,3)$，$C_1(0,2,0)$，$D(\sqrt{3},1,0)$，$E(0,0,3)$，$F(\sqrt{3},1,3)$，从而

$\overrightarrow{AD}=(\sqrt{3},3,-3)$，$\overrightarrow{AE}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{C_1E}=(0,-2,3)$，$\overrightarrow{EF}=(\sqrt{3},1,0)$， ……… 8 分

设平面 ADE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=\sqrt{3}x_1+3y_1-3z_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=2y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,1)$，

设平面 C_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1E}=-2y_2+3z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=\sqrt{3}x_2+y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},-3,-2)$，………………………………………………………………………… 10 分

设平面 ADE 与平面 C_1EF 所成的锐二面角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{3-2}{2\times\sqrt{3+9+4}}=\dfrac{1}{8}$. ……… 12 分

19.(1)证明：因为 $a_{2n}=a_{2n-1}-1$，所以 $b_{n+1}=2a_{2n+1}-1$，$b_n=2a_{2n}+1$， ……………………………………… 3 分

又 $a_{2n+1}=2a_{2n}$，所以$\dfrac{b_{n+1}+1}{2}=b_n-1$，所以 $b_{n+1}-3=2(b_n-3)$，

又 $b_1-3=a_1+a_2-3=a_2=2\neq0$，所以 $b_n-3\neq0$，所以$\dfrac{b_{n+1}-3}{b_n-3}=2$，……………………………………… 5 分

所以数列$\{b_n-3\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列；……………………………………………………………… 6 分

(2)解：由(1)可知 $b_n=2^n+3$，则 $a_{2n-1}+a_{2n}=2^n+3$，

所以 $S_{2n}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}+3n=2^{n+1}+3n-2$，易知 $S_{2n+2}>S_{2n}$， …………………………………………………… 9 分

又 $S_{20}=2^{11}+28=2076>2022$，$S_{18}=2^{10}+25=1049<2022$，有 $a_{19}+a_{20}=2076-1049=1027$，

又由 $a_{20}=a_{19}-1$，有 $2a_{19}-1=1027$，得 $a_{19}=514$， ………………………………………………………… 10 分

所以 $S_{19}=1049+514=1563<2022$，所以满足题意的 n 的最小值是 20. ………………………………………… 12 分

20.解：(1)设“这五名学生中恰有四名学生通过实验考核”为事件 A，

则 $P(A)=C_3^1\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^2+C_2^1\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{51}{125}$；…………………………………………… 3 分

(2)易知 X 的可能取值为 0,1,2,3,4,5,

则 $P(X=0)=\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot(1-p)^2=\frac{p^2-2p+1}{125}$, ………………………………………… 4 分

$P(X=1)=C_3^1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}\cdot(1-p)^2+C_2^1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot p(1-p)=\frac{10p^2-22p+12}{125}$, ………………… 5 分

$P(X=2)=C_3^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}\cdot(1-p)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3\cdot p^2+C_3^1\cdot C_2^1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}\cdot p(1-p)=\frac{25p^2-72p+48}{125}$,

………………………………………………………………………………………… 6 分

$P(X=3)=C_3^2\cdot C_2^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}\cdot p(1-p)+\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot(1-p)^2+C_3^1\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}\cdot p^2=\frac{-20p^2-32p+64}{125}$,

………………………………………………………………………………………… 7 分

$P(X=4)=C_3^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}\cdot p^2+C_2^1\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot p(1-p)=\frac{-80p^2+128p}{125}$, ………………………… 8 分

$P(X=5)=\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot p^2=\frac{64p^2}{125}$, ………………………………………………………… 9 分

所以 $E(X)=\sum_{i=0}^{5}i\cdot P(X=i)=\frac{10p+12}{5}\geqslant 3$,解得 $p\geqslant\frac{3}{10}$, ………………………………… 11 分

所以 p 的取值范围为 $\left[\frac{3}{10},1\right)$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$. ………………………………………………………………… 1 分

①当 $a\leqslant 0$ 时,$f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增;……………………………………………… 2 分

②当 $a>0$ 时,令 $f'(x)>0$,可得 $x>a$,此时函数 $f(x)$ 的增区间为 $(a,+\infty)$,减区间为 $(0,a)$; ……… 4 分

(2)由已知得 $g'(x)=0$,即 $2x_0\ln x_0-a-x_0^2=0$,① ………………………………………… 5 分

由 $g(x_0)=-2$,可得 $x_0(\ln x_0)^2-x_0^2+2x_0+a=0$,②

联立①②,消去 a,可得 $(\ln x_0)^2+2\ln x_0-2x_0+2=0$,③ ………………………………… 7 分

令 $t(x)=(\ln x)^2+2\ln x-2x+2$,则 $t'(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2=\frac{2(\ln x+1-x)}{x}$,

$h(x)=\ln x+1-x$,则 $h'(x)=\frac{1-x}{x}$,由 $h'(x)=0$,可得 $x=1$,

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

…………………………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore h(x)\leqslant h(1)=0$,$\ln x+1-x\leqslant 0$,故 $t'(x)\leqslant 0$,$\therefore t(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

注意到 $t(1)=0$,所以方程③有唯一解 $x_0=1$,代入①,可得 $a=-1$,$\therefore x_0=1,a=-1$. ………… 12 分

22. 解：(1)设 $P(x,y)$，因为$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，

所以$\begin{cases}\sqrt{3}m+\sqrt{3}n=2x,\\ m-n=2y,\end{cases}$ …………………………………………………………………………………… 2 分

则$(m+n)^2-(m-n)^2=4mn$，

$\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2-(2y)^2=4$，化简得$\frac{x^2}{3}-y^2=1$； …………………………………………………………………… 4 分

(2)由题意可知，直线 MQ 的斜率一定存在，设其方程为 $y=kx+m$，则 M 点坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}k+m\right)$，

联立直线 MQ 与曲线 E 的方程可得$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{3}-y^2=1,\end{cases}$

则$(1-3k^2)x^2-6kmx-3m^2-3=0$，

所以$\begin{cases}\Delta=36k^2m^2+12(m^2+1)(1-3k^2)=0,\\ 2x_Q=\frac{6km}{1-3k^2},\end{cases}$

求解可得$\begin{cases}3k^2=m^2+1,\\ x_Q=\frac{3km}{1-3k^2}=-\frac{3k}{m},\end{cases}$所以 $Q\left(-\frac{3k}{m},-\frac{1}{m}\right)$， …………………………………………………… 7 分

设点 $T(t,0)$，

所以$\overrightarrow{QT}=\left(t+\frac{3k}{m},\frac{1}{m}\right)$，$\overrightarrow{MT}=\left(t-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}k-m\right)$，

所以$\overrightarrow{QT}\cdot\overrightarrow{MT}=\left(t+\frac{3k}{m},\frac{1}{m}\right)\cdot\left(t-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}k-m\right)=(3t-6)\cdot\frac{k}{m}+t^2-\frac{3t}{2}-1$， …………………… 9 分

要使 $QT\perp MT$，则$\begin{cases}3t-6=0,\\ t^2-\frac{3t}{2}-1=0,\end{cases}$解得 $t=2$. ……………………………………………………………… 11 分

所以在 x 轴上存在定点 $T(2,0)$，满足 $QT\perp MT$. ………………………………………………………… 12 分