鹰潭市2023届高三第一次模拟考试数学试题(文科)
参考答案

一．选择题：1-4　DCCC　　5-8 BADD　　9-12　DCDC

二．填空题：13. $1^3+2^3+3^3+\cdots+10^3=55^2$　　14. $\dfrac{1}{2}$

15. $\dfrac{\sqrt{10}}{15}$　　16. 8π

三．解答题：

17．解：（1）当$n\geq 2$时，由$2S_n=(n+1)a_n$可得

$2S_{n-1}=na_{n-1}$，…………………………………………1分

上述两个等式作差可得

$2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$，……………………………………………………………………2分

所以，$(n-1)a_n=na_{n-1}$，则

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}$，……………………………………………………………………3分

所以，

$a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-1}=n$，……………………………………………………

….5分.

$a_1=1$也满足$a_n=n$，故对任意的$n\in\mathrm{N}^*$，

$a_n=n$……………………………………………………………………6分

（2）解：对于任意的正整数n，$c_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n(n+2)},n为奇数\\2^n,n为偶数\end{cases}$，

所以，

$T_{2n}=\dfrac{1}{1\times3}+2^2+\dfrac{1}{3\times5}+2^4+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+2^{2n}$……………………………………………………

…….7分

$=\left[\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]+\left(2^{2}+2^{4}+\cdots+2^{2n}\right)$……………………………………

………………8 分

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)+\frac{4\left(1-4^{n}\right)}{1-4}$……………………………………………………

…………………10 分

$=\frac{n}{2n+1}+\frac{4^{n+1}-4}{3}$…………………………………………………………………………

…………………………………12 分

18．**解：**（1）因为 $y=a\cdot b^{x}$，所以两边同时取常用对数，得 $\ln y=\ln a+x\ln b$，……………………2 分

设 $v=\ln y$，所以 $v=\ln a+x\ln b$，设

$\alpha=\ln a,\beta=\ln b$，…………………………………………………3 分

因为 $\overline{x}=3,\overline{v}=1.94$，所以 $\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iv_i-5\overline{x}\cdot\overline{v}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^{2}-5\overline{x}^{2}}=\frac{33.82-5\times 3\times 1.94}{55-5\times 3^{2}}=0.472,$………………5 分

$\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{x}=1.94-0.472\times 3=0.524$，…………………………………………………………

…………6 分

所以 $\ln\hat{a}=0.524,\ln\hat{b}=0.472$

所以

$\hat{a}=e^{0.524}=1.7,\hat{b}=e^{0.472}=1.6$……………………………………………………………………

7 分

所以

$\hat{y}=1.7\times 1.6^{x}$……………………………………………………………………………………

…….8 分

（2）由题意知 2023 年与 2024 年这两年的年平均增长率 $1.6-1.3=0.3$，……………………10 分

2022 年中国车载音乐市场规模为 17，

故预测 2024 年的中国车载音乐市场规模 $17(1+0.3)^{2}=28.73$（十亿元）…………12 分

19．解：（1）$AA_1\perp$平面ABC，$BD\subset$平面ABC，故$AA_1\perp BD$，……………………………1分

ΔABC是等边三角形，D是AC中点，故$BD\perp AC$，………………………2分

$AC\cap AA_1=A$，$AC,AA_1\subset$面A_1ACC_1，故$BD\perp$平面A_1ACC_1……………3分

（2）如图所示：F是AB中点，连接DF，A_1F，则$DF//BC$，$BC//B_1C_1$，故$DF//B_1C_1$……4分

异面直线B_1C_1与A_1D所成角为

$\angle A_1DF$，……………………………………………………………………5分

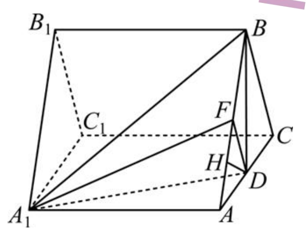
在$\triangle A_1DF$中，$DF=\frac{1}{2}BC=1$，$A_1D=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$A_1F=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，……………6

分

根据余弦定理：$\cos\angle A_1DF=\frac{5+1-5}{2\times1\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$，

故异面直线B_1C_1与A_1D所成角的余弦值为

$\frac{\sqrt{5}}{10}$……………………………………………………………7分



（3）过点D作$DH\perp AB$于H，$AA_1\perp$平面ABC，$HD\subset$平面ABC，故$HD\perp AA_1$，……………8分

$AA_1\cap AB=A$，$AA_1,AB\subset$面ABB_1A_1，故$HD\perp$平面ABB_1A_1，

$HD=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$V_{D-A_1B_1B}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1B_1B}\times HD=\frac{1}{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，……………………………………

……………………10分

$S_{\triangle A_1BD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，……………………………………………

……………………………11分

故$V_{B_1-A_1DB}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle A_1DB}\times d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{15}}{2}d=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得

$d=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ .... 12 分

20. **解**：（Ⅰ）当 $m=e$ 时，$h(x)=e^{2x}-e(2x+1)$，则

$h'(x)=2e^{2x}-2e$. .... 1 分

令 $h'(x)=0$，得

$x=\dfrac{1}{2}$，... 2 分

当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，$h'(x)<0$，

当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,\dfrac{1}{2})$，单调递增区间为 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ .... 4 分

（II）若 $h(x)\geqslant 1-m$ 恒成立，即 $e^{2x}-m(2x+1)\geq m+1$ 恒成立，

即 $e^{2x}-2mx\geq 1$ 恒成立，设 $F(x)=e^{2x}-2mx$，则

$F'(x)=2e^{2x}-2m$，... 5 分

当 $m\leqslant 0$ 时，$F'(x)>0$ 恒成立，所以 $F(x)$ 是 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的增函数

注意到 $F(0)=1$，所以 $x>0$ 时，$F(x)>1$，不合题意. .... 6 分

当 $m>0$ 时，若 $x<\dfrac{1}{2}\ln m$，则 $F'(x)<0$，若 $x>\dfrac{1}{2}\ln m$，则 $F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 是 $(-\infty,\dfrac{1}{2}\ln m)$ 上的减函数，是 $(\dfrac{1}{2}\ln m,+\infty)$ 上的增函数，.................................... 8 分

故只需

$F(x)_{\min}=F(\dfrac{1}{2}\ln m)=m-m\ln m\geq 1$，... 9 分

令 $u(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1(x>0)$.

则

$u'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$ ....

..................10 分

当 $0<x<1$ 时，$u'(x)<0$，若 $x>1$ 时，$u'(x)>0$

所以 $u(x)$ 是 $(0,1)$ 上的减函数，是 $(1,+\infty)$ 上的增函数，..11 分

故 $u(x)\ge u(1)=0,$ 当且仅当 $x=1$ 时取等号，

所以 $x-x\ln x\le 1$ 时，即 $m-m\ln m\le 1$，从而

$m=1$..12 分

21 **解：**(1) 由条件可设椭圆 G：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，

因为抛物线 M：$y^2=8x$ 的焦点为 $\left(2,0\right)$，所以 $\dfrac{2^2}{a^2}+\dfrac{0^2}{b^2}=1$，解得 $a=2$......................2 分

因为椭圆离心率为 $\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，则 $c=1$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$

故椭圆 G 的方程为

$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$..4 分

(2)

设直线 l：$y=kx+m(k\neq 0)$，$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right.$ ，

把直线 l 的方程代入椭圆 G 的方程，可得 $\left(4k^2+3\right)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，................5 分.

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-8\mathrm{km}}{4k^2+3}$，

$y_1+y_2=\dfrac{6m}{4k^2+3}$...6 分

因为 $AO\,//\,PB$，$BO\,//\,PA$，所以四边形 $OAPB$ 为平行四边形，

得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，即 $P\left(x_1+x_2,y_1+y_2\right)$，得

$P\left(\dfrac{-8km}{4k^2+3},\dfrac{6m}{4k^2+3}\right)$.......................................7 分

由 P 在椭圆 G 上可得，$\dfrac{\left(\dfrac{-8km}{4k^2+3}\right)^2}{4}+\dfrac{\left(\dfrac{6m}{4k^2+3}\right)^2}{3}=1$，即 $4m^2=4k^2+3$..............................8 分

因为 $T\left(x_0,0\right)$，又 $Q\left(-4,m-4k\right)$

所以 $\overrightarrow{TQ}=\left(-4-x_0,m-4k\right)$，

$\overrightarrow{OP}=\left(\dfrac{-8\mathrm{km}}{4k^2+3},\dfrac{6m}{4k^2+3}\right)$..9 分

所以$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{TQ}=\dfrac{-8\mathrm{km}}{4k^2+3}\times\left(-4-x_0\right)+\dfrac{6m}{4k^2+3}\times\left(m-4k\right)=\dfrac{6m^2+8km+8kmx_0}{4k^2+3}$……………………10

分

将$4m^2=4k^2+3$代入得，

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{TQ}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2k\left(1+x_0\right)}{m}=\dfrac{3}{2}$……………………………………………………11 分

所以$1+x_0=0$，即

$x_0=-1$…………………………………………………………………………………

12 分

22.（1）将$C:\rho=4\cos\theta$等号两边同时乘以ρ可得$\rho^2=4\rho\cos\theta$，

所以$x^2+y^2=4x$；即$(x-2)^2+y^2=4$；

所以曲线 C 的普通方程为

$(x-2)^2+y^2=4$；……………………………………………………………2 分

将$l:\begin{cases}x=3+2t\\y=-1+t\end{cases}$消去参数 t 可得，$x=3+2(y+1)$，整理得$x-2y-5=0$；

即直线 l 的普通方程为

$x-2y-5=0$……………………………………………………………………4 分

（2）注意到$P(3,-1)$在直线 l 上，直线l倾斜角为α,$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\cos\alpha=2\sin\alpha$，

$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\sin\alpha>0,\cos\alpha>0,\because\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

解得

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,……………………………………………………………………………

..5 分

所以直线l参数方程为$\begin{cases}x=3+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t'\\y=-1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}t'\end{cases}$（$t'$ 为参数），…………………………………………………6 分

联立 C 的直角坐标方程与 l 的参数方程得$(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}t'+1)^2+(\dfrac{\sqrt{5}}{5}t'-1)^2=4$

整理得

$t'^2+\frac{2\sqrt{5}}{5}t'-2=0$，……………………………………………………………………………7分

设方程的解为t_1',t_2'，则$t_1'+t_2'=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$t_1't_2'=-2$，$t_1',t_2'$异号……………………………………8分

不妨设$|PM|=t_1'$，$|PN|=-t_2'$，

有

$\left|\frac{1}{|PM|}-\frac{1}{|PN|}\right|=\left|\frac{1}{t_1'}+\frac{1}{t_2'}\right|=\left|\frac{t_1'+t_2'}{t_1't_2'}\right|=\frac{\sqrt{5}}{5}$……………………………………………………………………10分

23.（1）因为$|x+1|-|x-2|\le|(x+1)-(x-2)|=3$，当且仅当$x\ge2$等号成立

所以$|x+1|-|x-2|$的最大值为

3．……………………………………………………………………………………………2分

因为不等式$f(x)\ge|t-3|$有解，所以$|t-3|\le3$，解得$0\le t\le6$，……………………………………4分

所以实数t的最大值

$M=6$．……………………………………………………………………………………5分

（2）由（1）知，$abc=12\sqrt{3}$，

因为$(a+b)^2+c^2\geqslant4ab+c^2$（当且仅当$a=b$时，等号成立），……………………………………6分

$4ab+c^2=2ab+2ab+c^2\ge3\sqrt[3]{(2ab)\times(2ab)\times c^2}=3\sqrt[3]{4(abc)^2}=3\sqrt[3]{4\times(12\sqrt{3})^2}=36$，……9分

当且仅当$2ab=c^2$，即$a=b=\sqrt{6}$，$c=2\sqrt{3}$时，等号成立，

所以$(a+b)^2+c^2$的最小值为

36．………………………………………………………………………………………10分