保定二模数学参考答案

一、选择题：

1.C　2.B　3.A　4.A　5.C　6.C　7.D　8.D

二、选择题

9. ABD　10. BCD　11. AD　12.BC

12 解析：设线段 BP、DQ 的长度分别为a、b，$\angle BCP=\alpha$，$\angle DCQ=\beta$，则 $AP=1-a$，$AQ=1-b$，$PQ=a+b$.则由勾股定理得$(a+b)^2=(1-a)^2+(1-b)^2$，即 $a+b=1-ab$，又因为 $\tan\alpha=a$，$\tan\beta=b$，于是$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{a+b}{1-ab}=1$，$\because 0^\circ<\alpha+\beta<90^\circ$，

$\therefore \alpha+\beta=45^\circ$，$\therefore \angle PCQ=45^\circ$，故 A 错误;

设$\angle DCQ=\theta$（$0^\circ<\theta<45^\circ$），则$\angle BCP=45^\circ-\theta$，$CQ=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$CP=\dfrac{1}{\cos(45^\circ-\theta)}$，

$$S_{\triangle PCQ}=\frac{1}{2}\cdot CQ\cdot CP\cdot\sin 45=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos(45^\circ-\theta)}\cdot\sin 45^\circ$$

$=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}\sin(2\theta+45^\circ)}\geq\sqrt{2}-1$，故 B 正确;

由 A 选项的推理可知

$a+b=1-ab$，$PQ=a+b$ $\therefore a+b=1-ab\geq 1-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$，$\therefore PQ=a+b\geq 2\sqrt{2}-2$，故 C 正确;

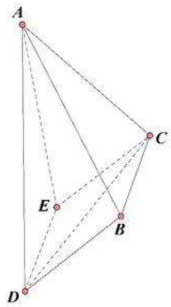
以 AB 为x轴正向，AD 为y轴正向建立平面直角坐标系，设线段 BP、DQ 的长度分别为a、b，则$P(1-a,0)$，$Q(0,1-b)$，$C(1,1)$，直线PQ的方程为$\dfrac{x}{1-a}+\dfrac{y}{1-b}=1$，则 C 点到直线$PQ$的距离

$$d=\frac{\left|\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}-1\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{1-a}\right)^2+\left(\frac{1}{1-b}\right)^2}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{1-a}\right)^2+\left(\frac{1}{1-b}\right)^2+1-\frac{2}{1-a}-\frac{2}{1-b}+2\cdot\frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{1-b}}{\left(\frac{1}{1-a}\right)^2+\left(\frac{1}{1-b}\right)^2}}$$

又$\because a+b=1-ab$，$\therefore 1-\dfrac{2}{1-a}-\dfrac{2}{1-b}+2\cdot\dfrac{1}{1-a}\cdot\dfrac{1}{1-b}=0$，$\therefore d=1$,故 D 错误.

三、填空题：

13. $f(x)=a^x(a>1)$ (答案不唯一)



14. 1

15. 780 （390也对）

16. $\frac{8}{3}$

16. 解析：如图，过 D 做 DE//BC 且 DE=BC,连结 CE、AE,

则 BCDE 为平行四边形，$V_{B-ACD}=V_{A-CDE}$，

设异面直线 AD 与 BC 的距离为d，AD 与 BC 所成的角为θ，

则$\angle ADE=\theta$或$\pi-\theta$，$\therefore V_{B-ACD}=V_{A-CDE}=V_{C-ADE}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DE\cdot\sin\theta\cdot d$，

$\therefore$当异面直线 AD 与 BC 垂直且距离最大时，四面体 ABCD 的体积最大.

$\because AB+BD=AC+CD=6$，$BC=2$，$\therefore$ B、C 两点在以 A、D 两点为焦点的椭球面上，过 BC 做轴 AD 的垂面，交轴 AD 于 M，垂面与椭球面的交线是一个半径为r的圆，BC 是它的一条弦，

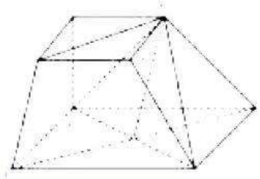
$\therefore$四面体 ABCD 体积为$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCM}\cdot AD=\frac{4}{3}\sqrt{r^2-1}$，

当点 M 位于椭球的中心时r最大，最大值为$\sqrt{5}$，$\therefore$四面体 ABCD 体积的最大值为$\frac{8}{3}$.

四、解答题：

17解：

(1)证明：如图：



连接AC交BD于点O，连接EG，GO，

由ABCD − EFGH为四棱台，知ACGE四点共面，··1分

且$EG\subset$面EFGH，$AC\subset$面ABCD.

$\therefore EG//AC$. ··2分

$\because$ EFGH和ABCD均为菱形，且$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$EH=2, AD=4$，

$\therefore EG=\frac{1}{2}AC=AO=2\sqrt{3}$，$\therefore$四边形AOGE为平行四边形，································4分

$\therefore AE//GO, GO\subset$面BDG，$AE\not\subset$面BDG，

$\therefore AE//$平面BDG；···5分

(2)法一：

如图，设BC的中点为M,根据题意得$DM\perp DA$，且DA, DM, DH两两垂直，以D为坐标原点.以DA为x轴，DM为y轴，DH为z轴，如图建立空间直角坐标系，

则$D(0,0,0), A(4,0,0), E(2,0,3), B(2,2\sqrt{3},0), F(1,\sqrt{3},3), G(-1,\sqrt{3},3)$，$H(0,0,3)$，
则$\overrightarrow{DB}=(2,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DG}=(-1,\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{HE}=(2,0,0)$，
$\overrightarrow{BG}=(-3,-\sqrt{3},3)$ ……………………………………6分
设$\vec{n}=(x,y,z)$是平面BDG的一个法向量，
则有$\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DG}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x+2\sqrt{3}\cdot y+0\times z=0\\ -x+\sqrt{3}\times y+3\times z=0\end{cases}$，
令$y=-\sqrt{3}$，解得：$x=3$，$z=2$，
$\therefore \vec{n}=(3,-\sqrt{3},2)$，……………………………………………………………………………8分

则点F到平面BDG的距离为$\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{GF}|}{|\vec{n}|}=\frac{3}{2}$…………………………………………………………………9分

三棱锥$F-BDG$的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}BD\sqrt{9+3}\times\frac{3}{2}=2\sqrt{3}$……………………………………………10分

法二：连接GE交FH于K，$\because GE\perp FH$，$FD\perp GE$，$FH\cap DH=D$

$\therefore$ $GE\perp$面BDHF ……6分

$\because$四边形ABCD为菱形且$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，EF=2，$\therefore GK=\sqrt{3}$ ………………………………8分

$\therefore V_{F-BDG}=V_{G-BDF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ ……………………………………………………10分

18. 解：

(1) $\because AD\cos\angle ADB=(\sqrt{2}BD-AB)\cos\angle ABD$，
由正弦定理得$\sin\angle ABD\cos\angle ADB=(\sqrt{2}\sin\angle BAD-\sin\angle ADB)\cos\angle ABD$，………1分
$\therefore \sqrt{2}\sin\angle BAD\cos\angle ABD=\sin\angle ABD\cos\angle ADB+\cos\angle ABD\sin\angle ADB$，
$\therefore \sqrt{2}\sin\angle BAD\cos\angle ABD=\sin(\angle ABD+\angle ADB)$，
$\therefore \sqrt{2}\sin\angle BAD\cos\angle ABD=\sin\angle BAD$， ………………………………………………………4分

$\because \sin\angle BAD\neq 0$，$\therefore \cos\angle ABD=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\because 0<\angle ABD<\pi$，$\angle ABD=\frac{\pi}{4}$； …………………………………………………………………6分

(2)记$\angle BCD=\theta$，
在$\triangle BCD$中，$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\theta=20-16\cos\theta$ ，…………………7分
由(1)知ΔABD为等腰直角三角形，$AB\perp AD$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{4}BD^2=5-4\cos\theta$， ……………………………………………………8分

$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\theta=4\sin\theta$， ………………………………………………………………9分

$\therefore$四边形ABCD的面积S为
$S=S_{\triangle ABD}+S_{BCD}=5-4\cos\theta+4\sin\theta$，

3

$= 5 + 4\sqrt{2}\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) \leqslant 5 + 4\sqrt{2}$，……………………………………………11分

当$\theta = \frac{3\pi}{4}$时，$\sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = 1$，等号成立.

∴四边形ABCD面积的最大值为$5 + 4\sqrt{2}$. ……………………………………………12分

19. 解：

(1)$\because 2S_n = 2na_n - n^2 + n$

当$n \geq 2$时，$2S_{n-1} = 2(n-1)a_{n-1} - (n-1)^2 + n-1$ ……………………………………………2分

两式相减得：$2a_n = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} - 2n + 2$

化简得$(n-1)(a_n - a_{n-1} - 1) = 0$

$\because n \geq 2$，$\therefore a_n - a_{n-1} = 1$ ……………………………………………4分

$\because a_1 = 1$，所以数列$\{a_n\}$是以1为首相，1为公差的等差数列 …………………… 5分

$\therefore a_n = n$ ……………………………………………6分

(2)由（1）$\left(-\frac{1}{2}\right)^{a_n} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ∴$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{a_{n+1}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{a_n}} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2}$

∴数列$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^{a_n}\right\}$是以$-\frac{1}{2}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列. ……………………………7分

$\therefore T_n = \frac{-\frac{1}{2}\times\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{3}$，……………………………………………8分

∴当n为偶数时$T_n - \frac{1}{T_n} = \frac{3}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3} \in \left(\frac{8}{3}, \frac{15}{4}\right]$ ……………………………………………9分

∴当n为奇数时$T_n - \frac{1}{T_n} = \frac{3}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} - \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3} \in \left[\frac{3}{2}, \frac{8}{3}\right)$ ……………………………………………10分

$\therefore \begin{cases} T_n - \frac{1}{T_n} \geq \frac{3}{2} \\ T_n - \frac{1}{T_n} \leq \frac{15}{4} \end{cases}$ ……………………………………………11分

$\therefore (s-t)_{min} = \frac{9}{4}$. ……………………………………………12分

20. 解：

（1）设高二年级与高一年级在前两场打平的条件下，最终战胜高一年级的事件为A, . . . 1分

则$P(A) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ……………………………………………3分

（2）根据题意得高三年级获得积分的ξ的取值可为0,3,6 ……………………4分

$P(\xi = 0) = \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} + 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + 2\times\right.$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\Big)=\frac{55}{243}\times\frac{1}{2}=\frac{55}{486}$…………………………………………………6分

$P(\xi=6)=\Big(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\Big)\times\Big(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+2\times$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\Big)=\frac{188}{243}\times\frac{1}{2}=\frac{94}{243}$ ……………………………………………………8分

$P(\xi=3)=1-\frac{55}{486}-\frac{188}{486}=\frac{1}{2}$ ………………………………………………………………9分

$\therefore\xi$的分布列为

ξ	0	3	6
P	$\frac{55}{486}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{94}{243}$

……………………………………………………………………………………………10分

$\therefore E(\xi)=3\times\frac{1}{2}+6\times\frac{94}{243}=\frac{619}{162}$

21、解：(1)设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$

根据题意得$\begin{cases}a=2b\\ \frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1\end{cases}$　解得$\begin{cases}a^2=20\\ b^2=5\end{cases}$

故所求椭圆方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$ ……………………………………………………4分

证明：（2）设直线$l:y=kx+m$交该椭圆$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$与$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$两点.

将$y=kx+m$代入$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-20=0$

所以$\begin{cases}(8km)^2-4(1+4k^2)(4m^2-2)>0\\ x_1+x_2=-\frac{8km}{1+4k^2}\\ x_1x_2=\frac{4m^2-20}{1+4k^2}\end{cases}$

……………………………………………………………………………6分

$\because$ 直线PA, PB能与x轴共同围成底边在x轴上的等腰三角形，

$\therefore k_{PA}+k_{PB}=0$，…………………………………………………………7分

即$\frac{y_1-2}{x_1-2}+\frac{y_2-2}{x_2-2}=\frac{(y_1-2)(x_2-2)+(y_2-2)(x_1-2)}{(x_1-2)(x_2-2)}=0$

$\therefore(kx_1+m-2)(x_2-2)+(kx_2+m-2)(x_1-2)$，

$=2kx_1x_2+(m-2k-2)(x_1+x_2)-4(m-2)$，　………………………………9分

即$2k\frac{4m^2-20}{1+4k^2}-(m-2k-2)\frac{8km}{1+4k^2}-4(m-2)=0$

即$(4k-1)m+8k^2-10k+2=0$　……………………………………11分

$\therefore$ 直线PA, PB与x轴共同围成底边在x轴上的等腰三角形时直线AB的斜率为定值$\frac{1}{4}$. …12分

22、解：

(1)$\because f(x)=x^2(e^x-1)$

$\therefore f'(x)=(x^2+2x)e^x-2x$

$\therefore f'(1)=3e-2$ ……………………………………………………………………2分

又$\because f(1)=e-1$

$\therefore f(x)$在点$A(1,e-1)$处的切线方程为$(3e-2)x-y-2e+1=0$…………………………4分

(2)$g(x)=\frac{f(x)}{x}-\ln x-1$的图像恒在x轴上方，等价于$x(e^x+m)-\ln x-1>0$恒成立

即$m>\frac{\ln x+1}{x}-e^x$恒成立， ……………………………………………………………5分

令$\varphi(x)=\frac{\ln x+1}{x}-e^x$，则$\varphi'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}-e^x=-\frac{\ln x+x^2e^x}{x^2}$

令$\phi(x)=-(\ln x+e^x x^2)$，则$\phi'(x)=-\left(\frac{1}{x}+x^2e^x+2xe^x\right)<0$

所以$\phi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减 ……………………………………………6分

又$\phi\left(\frac{1}{2}\right)>0,\phi(1)<0$，所以在$(0,+\infty)$上存在唯一的$x_0$使$\phi(x_0)=0$

当$x\in(0,x_0)$时$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$单调递增，当$x\in(x_0,+\infty)$时$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$单调递减.

故$\varphi(x)$的最大值为$\varphi(x_0)=\frac{\ln x_0+1}{x_0}-e^{x_0}$……………………………………………………8分

又$\ln x_0+e^{x_0}x_0{}^2=0$，故$x_0e^{x_0}=-\frac{\ln x_0}{x_0}$，

两边取对数得$\ln x_0+x_0=\ln(-\ln x_0)+(-\ln x_0)$ ……………………………………9分

又$\delta(x)=x+\ln x$单调递增，所以$x_0=-\ln x_0$，故$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$…………………………………10分

所以$\varphi(x_0)=\frac{\ln x_0+1}{x_0}-e^{x_0}=\frac{\ln x_0}{x_0}+\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}=-1$

所以$m\geq-1$……………………………………………………………………………12分

6

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。