



2021 年高考精准备考原创押题卷(三)·数学(文科)参考答案

1. 选 C 据题意 $\complement_{\mathbb{R}} A = (-\infty, 0]$, 所以 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{-2, -1, 0\}$, 故选 C.

2. 选 B 法一: 由 $\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha} = -5$ 可知 $\sin\alpha = 3\cos\alpha$, 又

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \therefore \sin^2\alpha = \frac{9}{10}, \cos^2\alpha = \frac{1}{10}, \therefore \cos 2\alpha =$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\frac{4}{5}, \text{ 故选 B.}$$

法二: 由 $\frac{2\cos\alpha + \sin\alpha}{2\cos\alpha - \sin\alpha} = -5$ 可知 $\sin\alpha = 3\cos\alpha$, 即 $\tan\alpha =$

$$3, \text{ 则 } \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} =$$

$$\frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5}, \text{ 故选 B.}$$

3. 选 D 3 袋垃圾分别记为 A, B, C, 投入三个垃圾桶甲、乙、丙中, 共有 6 种情况, 即 $\{(A \text{ 甲}, B \text{ 乙}, C \text{ 丙}), (A \text{ 甲}, B \text{ 丙}, C \text{ 乙}), (A \text{ 乙}, B \text{ 甲}, C \text{ 丙}), (A \text{ 乙}, B \text{ 丙}, C \text{ 甲}), (A \text{ 丙}, B \text{ 甲}, C \text{ 乙}), (A \text{ 丙}, B \text{ 乙}, C \text{ 甲})\}$, 其中恰有 1 袋投放正确的情况有 3 种, 即 $\{(A \text{ 甲}, B \text{ 丙}, C \text{ 乙}), (A \text{ 乙}, B \text{ 甲}, C \text{ 丙}), (A \text{ 丙}, B \text{ 乙}, C \text{ 甲})\}$, 由古典概型计算公式得三袋恰投对一袋垃圾的概率为 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, 故选 D.

4. 选 A 如图所示, $AB = 40 \times 0.5 = 20$,

由于 $\angle BAS = 30^\circ$, 可得 $\angle BSA = 45^\circ$,

由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle BSA} = \frac{BS}{\sin \angle BAS}$, 即

$$\frac{20}{\sin 45^\circ} = \frac{BS}{\sin 30^\circ},$$

解得 $BS = 10\sqrt{2}$.

故灯塔 S 与 B 之间的距离是 $10\sqrt{2}$ 海里, 故选 A.

5. 选 D 设复数 z 在复平面上的对应点为 $Z(x, y)$,

由 $z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} = 17$ 可得 $x^2 + y^2 + 2x = 17$,

$$\text{即 } (x+1)^2 + y^2 = 18,$$

所以点 Z 的轨迹是以 $(-1, 0)$ 为圆心, $3\sqrt{2}$ 为半径的圆, 圆心到点 $(-3, 2)$ 的距离为

$$d = \sqrt{(-3+1)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2},$$

所以 $|z+3-2i|$ 的最大值为 $r+d = 5\sqrt{2}$, 故选 D.

6. 选 D 如图, 设点 M 在 x 轴上方,

求比值可以用特殊值, 故设 $|MN|$

$= 4$, 则 $|NF_1| = 5$, 又 $\angle F_1MF_2 =$

90° , 则 $|MF_1| = 3$, 再设 $|NF_2| =$

l , 则 $l+4-3=2a, 5-l=2a$, 解得

$$l=2, \text{ 则 } |MF_2| = 6, |F_1F_2| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 2c, 2a =$$

$$5-l=3, \text{ 则 } e = \frac{c}{a} = \frac{2c}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 故选 D.}$$

7. 选 B 易知 $a > 0, b > 0, \frac{a+b}{2} = 1$, 所以 $ab < \frac{(a+b)^2}{4} = 1$,

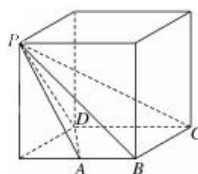
即 $ab < \frac{a+b}{2}$, 又因为 $ab > \frac{b}{a} \Leftrightarrow a > 1$, 显然成立,

所以 $\frac{a+b}{2} > ab > \frac{b}{a}$, 故选 B.

8. 选 A 根据几何体的三视图可知,

还原到正方体如图,

该几何体是底面为直角梯形(上底是 1, 下底是 2, 高是 2), 高为 2 的四棱锥 $P-ABCD$,



$$\text{所以该几何体的体积 } V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 \times 2 = 2.$$

故选 A.

9. 选 A 由 $kx - y - 2 - k = 0$, 得 $k(x-1) - y - 2 = 0$, 所以

$$\begin{cases} x-1=0, \\ -y-2=0, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases} \text{ 所以直线 } kx-y-2-k=0$$

过定点 $N(1, -2)$.

从点 $P(-3, 2)$ 向直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 作垂线, 垂足为 M, 则 M 在以 PN 为直径的圆上, 因为 $P(-3, 2), N(1, -2)$, 所以 PN 的中点为 $G(-1, 0)$, $|PN| =$

$$\sqrt{(-3-1)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}, \text{ 所以圆 G 的方程为 } (x+1)^2 + y^2 = 8, \text{ 即 M 的轨迹方程为 } (x+1)^2 + y^2 = 8, \text{ 因为 } Q(2, 4), (2+1)^2 + 4^2 > 8, \text{ 所以点 } Q(2, 4) \text{ 在圆外, } |QG| = \sqrt{(2+1)^2 + 4^2} = 5, \text{ 所以 } |QM|_{\min} = |QG| - r = 5 - 2\sqrt{2}, \text{ 故选 A.}$$

10. 选 C 由 $\begin{cases} |3x+1| > 0, \\ |3x-1| > 0 \end{cases}$ 得 $x \neq \pm \frac{1}{3}$,

$\therefore f(x)$ 的定义域为

$$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right),$$

$$\text{又 } f(-x) = \ln|-3x+1| + \ln|-3x-1| = \ln|3x-1| + \ln|3x+1| = f(x),$$

$\therefore f(x)$ 为定义域内的偶函数, 可排除 B, D;

$$\text{当 } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \text{ 时, } f(x) = \ln(-3x-1) + \ln(-3x+1) = \ln(9x^2-1),$$

$\therefore t = 9x^2 - 1$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 上单调递减, $y = \ln t$ 单调

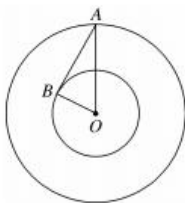
递增, $\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 上单调递减, 可排除 A;

$\therefore f(x)$ 为偶函数且在 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增, C 正确, 故选 C.



11. 选 C 因为外球的表面积为 $100\pi \text{ cm}^2$, 内球的表面积为 $64\pi \text{ cm}^2$, 所以外球的半径为 5 cm, 内球的半径为 4 cm, 如图, 以外球表面上一点 A、内球表面上一点 B 以及球心 O 作截面, 因为线段 AB



不穿过小球内部, 所以当线段 AB 与内球相切时, 线段 AB 的长度最大, 则线段 AB 最长为 $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ (cm)}$, 故选 C.

12. 选 B 由对任意 $0 \leq x_1 < x_2$, 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$,

可得 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减; 由函数 $y = f(x+2)$ 的图象关于点 $(-2, 0)$ 对称, 得函数 $y = f(x)$ 的图象关于原点对称, 即函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

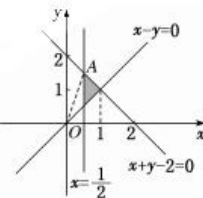
于是得 $f(a^2 + 2b) \leq f(b^2 + 2a)$, $\therefore a^2 + 2b \geq b^2 + 2a$, $\therefore b^2 - a^2 + 2a - 2b \leq 0$,

$\therefore (b-a)[b-(2-a)] \leq 0$, 则当 a

$\in [\frac{1}{2}, 1]$ 时, 令 $a = x, b = y$, 问题

等价于点 (x, y) 满足区

$$\begin{cases} (y-x)[y-(2-x)] \leq 0, \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$



如图阴影部分, 由线性规划知识可知 $\frac{y}{x}$ 为 (x, y) 与 $(0,$

$0)$ 连线的斜率, 由图可得 $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} \in [1, 3]$, $\therefore \frac{a}{a+b} =$

$$\frac{1}{1 + \frac{b}{a}} \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]. \text{ 故选 B.}$$

13. 解析: 因为 $a+b+c=0, |a|=|b|=1$,

$$\text{所以 } (a-b) \cdot c = -(a-b) \cdot (a+b) = b^2 - a^2 = |b|^2 - |a|^2 = 0.$$

答案: 0

14. 解析: 由题图可知, $x = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3, y =$

$$\frac{2+3+5+7+8}{5} = 5, \text{ 则样本点的中心为 } (3, 5), \text{ 代入线}$$

性回归方程为 $5 = 3b + 0.2$, 解得 $b = 1.6$.

答案: 1.6

15. 解析: 由 $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{1 + \cos A}{2 - \cos B}$,

$$\text{得 } 2\sin A - \sin A \cos B = \sin B + \cos A \sin B,$$

$$\text{则 } 2\sin A = \sin B + \sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin B + \sin(A+B) = \sin B + \sin C, \text{ 即 } 2a = b+c,$$

由 $\cos A = \frac{3}{5} > 0$ 可知 A 为锐角,

$$\text{则 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{4}{5},$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = 6, \text{ 得 } bc = 15,$$

$$\text{由余弦定理得 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{3}{5} = (b+c)^2 - \frac{16}{5}bc = 4a^2 - 48, \text{ 即 } 3a^2 = 48, \text{ 解得 } a = 4.$$

答案: 4

16. 解析: 由 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 得 $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$.

$$\text{设 } \overrightarrow{PD} = t \overrightarrow{PG}, \therefore \overrightarrow{PB} = \frac{5}{3} \overrightarrow{PE}, \overrightarrow{PC} = 2 \overrightarrow{PF},$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} = \frac{5}{3} \overrightarrow{PE} - 2 \overrightarrow{PF} + t \overrightarrow{PG}.$$

$\therefore E, F, G, A$ 四点共面,

$$\therefore \frac{5}{3} - 2 + t = 1, \text{ 解得 } t = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \overrightarrow{PD} = \frac{4}{3} \overrightarrow{PG}, \text{ 故 } \frac{PG}{PD} = \frac{3}{4}.$$

答案: $\frac{3}{4}$

17. 解: (1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2}S_1 + 1$, 解得 $a_1 = 2$. 2分

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}S_n + 1 - \frac{1}{2}S_{n-1} - 1 = \frac{1}{2}a_n,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}a_n = a_{n-1}, \quad 4 \text{ 分}$$

因为 $a_1 = 2, \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 其通项公式为 $a_n = 2^n$. 6分

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } b_n = \frac{1}{\log_2 a_n \cdot \log_2 a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } T_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \quad 10 \text{ 分}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \quad 12 \text{ 分}$$

18. 解: (1) 证明: 因为侧面 BCC_1B_1 为菱形, 则 $BB_1 = CC_1 = B_1C_1 = BC = 2, B_1C \perp BC_1$.

$$\text{由 } BC_1 = 2\sqrt{3}, \text{ 得 } BG = \sqrt{3}, \text{ 则 } B_1G = \sqrt{BB_1^2 - BG^2} = 1, \text{ 从而 } B_1C = 2B_1G = 2, \quad 1 \text{ 分}$$

$$\text{又 } A_1C = 2\sqrt{2}, A_1B_1 = 2,$$

$$\text{所以在 } \triangle A_1B_1C \text{ 中, } A_1C^2 = A_1B_1^2 + B_1C^2,$$

所以 $A_1B_1 \perp B_1C$, 因为 $A_1B_1 \parallel AB$,

所以 $B_1C \perp AB$. 4分

又 $B_1C \perp BC_1$, 且 $AB \cap BC_1 = B$,

所以 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1 . 6分



(2)由(1)知 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1 , 所以 B_1G 是三棱锥 B_1-ABC_1 的高, 7 分

因为 $AA_1^2 + AC^2 = A_1C^2$, 所以 $AA_1 \perp AC$,

所以平行四边形 A_1ACC_1 是矩形,

所以 $A_1C = AC_1 = 2\sqrt{2}$,

从而 $AC_1^2 + AB^2 = BC_1^2$,

所以 $AB \perp AC_1$, 10 分

所以 $V_{B_1-ABC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC_1} \cdot B_1G = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} \times 1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 12 分

19. 解: (1)由题意可知
$$\begin{cases} c=1, \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases} \quad 2 \text{ 分}$$

解得
$$\begin{cases} a=\sqrt{2}, \\ b=1. \end{cases}$$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$. 4 分

(2)法一:由题意,设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$, 且 $k \neq 0$.

联立
$$\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{整理得 } (1+2k^2)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0.$$

设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), M(x_M, y_M)$,

则 $x_A + x_B = \frac{4k^2}{1+2k^2} = 2x_M, x_A x_B = \frac{2k^2-2}{1+2k^2}$, 6 分

因此 $y_M = k(x_M - 1) = k\left(\frac{2k^2}{1+2k^2} - 1\right) = \frac{-k}{1+2k^2}$,

即 $M\left(\frac{2k^2}{1+2k^2}, \frac{-k}{1+2k^2}\right)$. 8 分

于是直线 OM 的斜率为 $-\frac{1}{2k}$,

直线 OM 的方程为 $y = -\frac{x}{2k}$,

联立
$$\begin{cases} y = -\frac{x}{2k}, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{整理得 } \left(1 + \frac{1}{2k^2}\right)x^2 = 2.$$

设 $N(x_N, y_N)$, 则 $x_N^2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}$.

在平行四边形 $OANB$ 中, M 为 ON 中点, 从而 $2x_M =$

x_N , 即 $4x_M^2 = x_N^2$, 因此 $4\left(\frac{2k^2}{1+2k^2}\right)^2 = \frac{4k^2}{1+2k^2}$, 10 分

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以, 直线 l 的方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$. 12 分

法二:求得 $M\left(\frac{2k^2}{1+2k^2}, \frac{-k}{1+2k^2}\right)$ 的过程同法一. 8 分

在平行四边形 $OANB$ 中, 有 $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$, 设

$N(x_N, y_N)$, 所以 $N\left(\frac{4k^2}{1+2k^2}, \frac{-2k}{1+2k^2}\right)$.

又因为点 N 在椭圆 C 上,

从而 $\frac{\left(\frac{4k^2}{1+2k^2}\right)^2}{2} + \left(\frac{-2k}{1+2k^2}\right)^2 = 1$, 10 分

解得 $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以, 直线 l 的方程为 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$. 12 分

20. 解: (1)设 $\{u_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 的相关系数为 r_1 , $\{x_i\}$ 和 $\{v_i\}$ 的相关系数为 r_2 ,

则 $r_1 = \frac{\sum_{i=1}^{18} (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{18} (u_i - \bar{u})^2 \sum_{i=1}^{18} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{215}{\sqrt{31250 \times 2}} = \frac{43}{50} =$

0.86 , 2 分

$r_2 = \frac{\sum_{i=1}^{18} (x_i - \bar{x})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{18} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{18} (v_i - \bar{v})^2}} = \frac{14}{\sqrt{77 \times 3.08}} = \frac{10}{11} \approx$

0.91 . 4 分

因为 $|r_1| < |r_2|$, 所以从相关系数的角度, 模型 $y = e^{u_i + v_i}$ 的拟合程度更好. 5 分

(2)①先建立 v 关于 x 的线性回归方程,

由 $y = e^{u_i + v_i}$, 得 $\ln y = u_i + \ln v_i$, 即 $v_i = \ln y - u_i$.

因为 $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{18} (x_i - \bar{x})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^{18} (x_i - \bar{x})^2} = \frac{2}{11} \approx 0.18, \bar{v} = \bar{v} - \lambda \bar{x} =$

$4.20 - \frac{2}{11} \times 20 \approx 0.56$, 8 分

所以 v 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{v} = 0.18x + 0.56$,

所以 $\hat{y} = e^{0.18x + 0.56}$. 9 分

②下一年销售额 y 需达到 90 亿元, 即 $y = 90$,

代入 $\hat{y} = e^{0.18x + 0.56}$, 得 $90 = e^{0.18x + 0.56}$,

又 $e^{4.4998} \approx 90$, 所以 $4.4998 \approx 0.18x + 0.56$,

所以 $x \approx \frac{4.4998 - 0.56}{0.18} \approx 21.89$,

所以预测下一年的研发资金投入量约是 21.89 亿元. 12 分

21. 解: (1)因为 $f(x) = x^2 - a \ln x$, 所以 $f'(x) = 2x - \frac{a}{x} =$

$\frac{2x^2 - a}{x} (x > 0)$,

依题意可得 $f'(1) = 2 - a = 0$, 得 $a = 2$. 2 分



$$(2) f'(x) = 2x - \frac{a}{x} = \frac{2x^2 - a}{x} (x > 0), \quad 3 \text{ 分}$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

当 $a > 0$ 时, 若 $0 < x < \sqrt{\frac{a}{2}}$, 则 $f'(x) < 0$, 若 $x > \sqrt{\frac{a}{2}}$, 则 $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 上单调递减,

在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \sqrt{\frac{a}{2}})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{\frac{a}{2}}, +\infty)$ 上单调递增. 6 分

(3) 证明: 因为关于 x 的方程 $f(x) = g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ,

所以 $x^2 - a \ln x = (a-2)x + b$, 即关于 x 的方程 $x^2 + (2-a)x - a \ln x = b$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根 x_1, x_2 , 不妨设 $x_2 > x_1 > 1$,

$$\begin{cases} x_1^2 + (2-a)x_1 - a \ln x_1 = b, \\ x_2^2 + (2-a)x_2 - a \ln x_2 = b, \end{cases} \quad \text{两式相减,}$$

$$\text{得 } x_1^2 - x_2^2 + (2-a)(x_1 - x_2) - a(\ln x_1 - \ln x_2) = 0,$$

$$\text{所以 } a = \frac{x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2 + \ln x_1 - \ln x_2}. \quad 8 \text{ 分}$$

要证 $x_1 + x_2 > a$,

$$\text{即证 } x_1 + x_2 > \frac{x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2 + \ln x_1 - \ln x_2},$$

因为 $x_2 > x_1$, 所以 $x_1 - x_2 < 0, \ln x_1 - \ln x_2 < 0$, 所以 $x_1 - x_2 + \ln x_1 - \ln x_2 < 0$,

$$\text{所以只需证 } (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + (x_1 + x_2) \cdot (\ln x_1 - \ln x_2) < x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2),$$

$$\text{即证 } \ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{2(\frac{x_1}{x_2} - 1)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}. \quad 10 \text{ 分}$$

令 $\frac{x_1}{x_2} = t$, 因为 $x_2 > x_1$, 所以 $0 < t < 1$,

所以只需证 $\ln t < \frac{2(t-1)}{t+1} (0 < t < 1)$,

$$\text{令 } h(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (0 < t < 1),$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2(t+1) - 2(t-1)}{(t+1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} =$$

$$\frac{(t+1)^2 - 4t}{t(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0,$$

所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 所以 $h(t) < h(1) = 0$,

$$\text{即 } \ln t < \frac{2(t-1)}{t+1} (0 < t < 1),$$

所以 $x_1 + x_2 > a$, 得证. 12 分

22. 解: (1) 当 $k=2$ 时, 消去 t 得 $x+2y=2, x \geq 0, y \geq 0$, 3 分
是以 $A(2, 0), B(0, 1)$ 为端点的线段. 5 分

(2) 当 $k=1$ 时, 曲线 C_1 的普通方程为椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

由 $\rho \cos \theta = x, \rho \sin \theta = y$ 得曲线 C_2 的普通方程为直线 $2x - 3y - 12 = 0$.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ 2x - 3y - 12 = 0, \end{cases} \quad \text{得 } 25y^2 + 72y + 128 = 0,$$

$$\Delta = 72^2 - 100 \times 128 = 5184 - 12800 < 0,$$

可知直线与椭圆相离, 则 PQ 的最小值为 P 到直线的距离的最小值.

$$\text{则 } d = \frac{|4 \cos t - 3 \sin t - 12|}{\sqrt{13}} = \frac{|5 \sin(t - \varphi) - 12|}{\sqrt{13}} =$$

$$\frac{12 - 5 \sin(t - \varphi)}{\sqrt{13}} \left(\tan \varphi = \frac{4}{3} \right), \text{ 当 } \sin(t - \varphi) = 1 \text{ 时, 有最}$$

$$\text{小值 } \frac{7\sqrt{13}}{13}. \quad 10 \text{ 分}$$

23. 解: (1) 当 $a=2$ 时, $f(x) = |2x-1|$, 则 $f(x) > 2 - |x+1|$ 等价于 $|2x-1| + |x+1| > 2$. 1 分

当 $x \leq -1$ 时, 则有 $1 - 2x - 1 - x = -3x > 2$, 解得 $x < -\frac{2}{3}$, 此时 $x \leq -1$;

当 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 时, 则有 $1 - 2x + x + 1 = 2 - x > 2$, 解得 $x < 0$, 此时 $-1 < x < 0$;

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 则有 $2x - 1 + x + 1 = 3x > 2$, 解得 $x > \frac{2}{3}$, 此时 $x > \frac{2}{3}$.

综上所述, 当 $a=2$ 时, 不等式 $f(x) > 2 - |x+1|$ 的解集为 $(-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$. 5 分

(2) 当 $x \in (1, 2)$ 时, 不等式 $f(x) + |x-1| > x$ 成立等价于当 $x \in (1, 2)$ 时, $|ax-1| > 1$ 成立. 6 分

若 $a < 0$, 则当 $x \in (1, 2)$ 时, $|ax-1| = -ax+1 > 1$ 恒成立;

若 $a=0$, 则当 $x \in (1, 2)$ 时, $|ax-1| = 1$, 不合乎题意;

若 $a > 0$, 由 $|ax-1| > 1$ 可得 $ax-1 < -1$ 或 $ax-1 > 1$, 解得 $x < 0$ 或 $x > \frac{2}{a}$, 由题意可得 $(1, 2) \subseteq$

$$(\frac{2}{a}, +\infty), \text{ 则 } 0 < \frac{2}{a} \leq 1, \text{ 解得 } a \geq 2.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$.

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 “专业、专注、有态度” 的创办公理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



微信搜一搜



自主选拔在线